

---

**Identificação por Análise Modal Operacional:  
Algoritmo de Abordagem Clássica no Domínio da Frequência**

---

**Rafael Rodrigues Maia Machado**

Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica

Orientador:  
Prof. José Dias Rodrigues

Departamento de Engenharia Mecânica  
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto, 2018

---

Rafael Rodrigues Maia Machado  
E-mail: em08124@fe.up.pt

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Departamento de Engenharia Mecânica  
Rua Dr. Roberto Frias  
4200-465 Porto  
Portugal

‘If you torture numbers, they’ll confess to anything.’

*Gregg Easterbrook*





---

## Resumo

---

A crescente necessidade de caracterização do comportamento dinâmico de uma dada estrutura de forma cada mais precisa, levou ao aparecimento de diferentes técnicas de identificação das propriedades modais. Um método robusto e com provas dadas da sua precisão de resultados é a Análise Modal Experimental (AME). Este método, que é utilizado de uma forma mais rudimentar desde a década de 1970 [Ewins, 2000], recolhe informação sobre a excitação aplicada na estrutura e a resposta da mesma para determinar as propriedades de vibração do sistema. Mais recentemente, surgiu um método que utiliza apenas a resposta do sistema para determinar as propriedades modais do mesmo, ou seja, não é necessário saber qual a excitação actuante na estrutura. Este método, denominado Análise Modal Operacional (AMO), é o tema central da presente dissertação.

O presente documento inicia-se com uma introdução ao tema de análise de vibrações em geral, e, mais particularmente, à AME e AMO. Segue-se uma contextualização do tema em que são abordados os conceitos fundamentais da AME, com o intuito de formar as bases necessárias para uma apta compreensão da temática da dissertação, a AMO.

Depois de expostos os conceitos essenciais ao tema de AMO, segue-se o desenvolvimento e implementação de um algoritmo de AMO capaz de determinar as propriedades modais de um dado sistema. O método selecionado que serve como base do algoritmo desenvolvido é denominado Abordagem Clássica no Domínio da Frequência (ACDF). Para validação do algoritmo, são realizados alguns casos de estudo a diferentes sistemas com diferentes propriedades modais, para se testar a precisão e fiabilidade do programa desenvolvido. Adicionalmente, para testar o programa em condições reais de utilização, são realizadas simulações de respostas reais com a inclusão de ruído nos sinais das respostas geradas analítica/numericamente.

Após uma análise dos resultados obtidos e da validação do algoritmo desenvolvido, são retiradas as conclusões referentes ao presente trabalho e dadas sugestões para trabalhos futuros na temática da Análise Modal Operacional.

**Palavras-chave:**Análise Modal Operacional, AMO, Abordagem Clássica no Domínio da Frequência, ACDF



---

## Abstract

---

### Identification by Operational Modal Analysis: An algorithm with a Classical Frequency-Domain Approach

The growing need to precisely describe the dynamic behavior of a structure, led to the rise of different techniques capable of identifying the modal properties of a system. A proven and robust method known for its precision and reliability is the Experimental Modal Analysis (EMA). This method, that has been used in a more rudimentary way since 1970 [Ewins, 2000], uses the data collected about the force applied to the structure and its response to determine the modal properties of the system. In more recent years, a method that only requires information about the response of the structure as arisen. That means that it's not necessary to know what forces are applied to the structure to determine its dynamic properties. This method, known as Operational Modal Analysis (OMA), is the core subject of this dissertation.

The current document begins with an introduction on the subject of vibrational analysis in general, and, in particular, EMA and OMA. The fundamental concepts of EMA are approached next, with the intention of laying the building blocks for an apt comprehension of the topic of this dissertation, OMA.

After the basic concepts of AMO are established, an algorithm that is able to determine the modal properties of a dynamic system is developed and implemented. The method selected on which the algorithm is based is called Classical Frequency-Domain Approach (CFDA). To validate the algorithm, tests are made on different systems with different modal properties to determine the precision and reliability of the developed program. Additionally, simulations of real responses signals with noise included are used to test program in real operational conditions.

Lastly, after an analysis of the obtained results and the validation of the algorithm, conclusions are drawn from the current work and suggestions are made for future work on the subject of Operational Modal Analysis.

**Keywords:** Operational Modal Analysis, OMA, Classical Frequency-Domain Approach, CFDA



---

## Agradecimentos

---

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador, Professor José Dias Rodrigues, pela orientação e tempo dedicado ao longo deste trabalho.

Aos meus amigos, por todo o percurso realizado juntos ao longo destes anos, nos bons e nos maus momentos e nas memórias que ficarão para sempre.

À minha namorada, pelo apoio demonstrado no decorrer destes últimos anos não só na vertente académica mas em todos os outros aspectos da minha vida pessoal.

À minha família em geral, e ao meu irmão em particular, pela confiança transmitida e apoio incondicional ao longo desta etapa da minha vida.

Por último, mas mais importante, aos meus pais, sem os quais não estaria aqui. Pela paciência demonstrada ao longo destes anos e por me darem todas as condições e mais algumas para ultrapassar qualquer dificuldade que surgisse, obrigado. Pelo apoio e crença incondicional depositados em mim, obrigado. Estarei-vos eternamente grato.

O meu mais sincero obrigado a todos.

Rafael Machado



---

## Conteúdo

---

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>vii</b>
<b>Conteúdo</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiii</b>
<b>Abreviaturas</b>	<b>xv</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Objectivos . . . . .	2
1.2 Estrutura do Documento . . . . .	3
<b>2 Análise Modal Experimental</b>	<b>5</b>
2.1 Fundamentos Teóricos . . . . .	6
2.1.1 Sistemas com um gdl . . . . .	7
2.1.2 Sistemas com múltiplos gdl . . . . .	13
2.2 Técnicas de Medição . . . . .	15
2.3 Análise dos Dados . . . . .	18
<b>3 Análise Modal Operacional</b>	<b>21</b>
3.1 Conceitos Teóricos . . . . .	22
3.1.1 Função de Correlação . . . . .	22
3.1.2 Densidade Espectral . . . . .	24
3.1.3 Identificação no Domínio do Tempo . . . . .	28
3.1.4 Identificação no Domínio da Frequência . . . . .	28
3.2 Caracterização do Algoritmo . . . . .	31
3.2.1 Descrição do Método . . . . .	31
3.2.2 Implementação em <i>MATLAB</i> . . . . .	34
3.2.3 Fluxograma do Algoritmo . . . . .	40

<b>4</b>	<b>Casos de Estudo</b>	<b>43</b>
4.1	Sistema com 2 Graus de Liberdade . . . . .	44
4.2	Sistema com 5 Graus de Liberdade . . . . .	46
4.3	Viga com Condições Fronteira Fixa-Livre . . . . .	47
4.4	Viga com Condições Fronteira Simplesmente Apoiada . . . . .	49
4.5	Veio com Condições Fronteira Livre-Livre . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>53</b>
5.1	Validação do Algoritmo . . . . .	53
5.1.1	2 Graus de Liberdade . . . . .	53
5.1.2	5 Graus de Liberdade . . . . .	61
5.1.3	Viga com Condições Fronteira Fixa-Livre . . . . .	70
5.1.4	Viga com Condições Fronteira Simplesmente Apoiada . . . . .	74
5.1.5	Veio com Condições Fronteira Livre-Livre . . . . .	78
5.1.6	Conclusões . . . . .	83
5.2	Simulação de Resposta Real . . . . .	85
5.2.1	2GDL sem amortecimento . . . . .	86
5.2.2	Viga Simplesmente Apoiada . . . . .	89
5.2.3	Conclusões . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>93</b>
6.1	Conclusões . . . . .	93
6.2	Trabalhos Futuros . . . . .	95
	<b>Referências</b>	<b>97</b>
<b>A</b>	<b>Código do Algoritmo Desenvolvido</b>	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Código da Função <i>ex2GDL</i></b>	<b>111</b>
<b>C</b>	<b>Código da Função <i>ex5GDL</i></b>	<b>115</b>
<b>D</b>	<b>Código da Função <i>vigaFL</i></b>	<b>119</b>
<b>E</b>	<b>Código da Função <i>vigaAS</i></b>	<b>123</b>
<b>F</b>	<b>Código da Função <i>veioLL</i></b>	<b>127</b>



---

## Lista de Figuras

---

2.1	Metodologia a seguir em análise de vibrações . . . . .	7
2.2	Sistema vibratório com um GDL em regime livre . . . . .	8
2.3	Sistema vibratório com um GDL em regime forçado . . . . .	9
2.4	Diagrama de Bode exemplificativo para um GDL . . . . .	11
2.5	Representação gráfica exemplificativa da Parte real e imaginária em função da frequência . . . . .	11
2.6	Diagrama de Nyquist genérico para um GDL . . . . .	12
2.7	Representação de uma FRF a três dimensões . . . . .	12
2.8	Representações exemplificativas de uma FRF para múltiplos GDL . . . . .	15
2.9	Equipamento de medição típico em análise modal . . . . .	16
2.10	Variação dos dados obtidos em diferentes condições na mesma peça de teste . . . . .	17
2.11	Método de análise <i>circle-fit</i> . . . . .	19
3.1	Exemplo de selecção de variáveis a exibir na <i>command window</i> . . . . .	38
3.2	Exemplo de selecção de variáveis para representação gráfica. . . . .	39
3.3	Fluxograma do Algoritmo . . . . .	41
4.1	Modelo genérico do sistema com 2GDL. . . . .	44
4.2	Modelo genérico do sistema com 5GDL. . . . .	46
4.3	Viga com uma extremidade encastrada e a outra livre. . . . .	47
4.4	Viga simplesmente apoiada. . . . .	49
4.5	Veio com as extremidades livres. . . . .	50
5.1	Propriedades do sistema com de 2GDL. . . . .	53
5.2	Varáveis de medição para o caso de estudo de 2GDL. . . . .	54
5.3	ANPSD para o caso de estudo de 2GDL sem amortecimento. . . . .	55
5.4	Resposta do segundo GDL do sistema em função do tempo. . . . .	57
5.5	ANPSD para o caso de estudo de 2GDL com amortecimento. . . . .	58
5.6	Influência do amortecimento no erro relativo das propriedades modais. . . . .	60
5.7	Propriedades do sistema com de 5GDL. . . . .	61
5.8	ANPSD para o caso de estudo de 5GDL sem amortecimento. . . . .	61
5.9	Ampliação do gráfico ANPSD para o caso de 5GDL sem amortecimento. . . . .	63
5.10	Forma de vibração do quarto modo de vibração do caso de estudo de 5GDL sem amortecimento. . . . .	65
5.11	ANPSD para o caso de estudo de 5GDL sem amortecimento com excitação apenas no terceiro GDL. . . . .	65
5.12	ANPSD para o caso de estudo de 5GDL com amortecimento. . . . .	66
5.13	ANPSD para o caso de estudo de 5GDL com as novas razões de amortecimento. . . . .	67
5.14	Ampliação do gráfico ANPSD para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	68
5.15	Propriedades do sistema da viga fixa-livre. . . . .	70

5.16	Variáveis de medição para o sistema da viga fixa-livre. . . . .	70
5.17	ANPSD para o sistema da viga fixa-livre. . . . .	71
5.18	Ampliação do gráfico ANPSD na zona da terceira frequência natural do sistema da viga fixa-livre. . . . .	72
5.19	Formas naturais de vibração identificadas do sistema viga fixa-livre. . . . .	74
5.20	ANPSD para o sistema da viga simplesmente apoiada. . . . .	75
5.21	Formas naturais de vibração identificadas do sistema viga simplesmente apoiada. . . . .	77
5.22	Propriedades do sistema do veio livre-livre. . . . .	78
5.23	Varáveis de medição para o sistema veio livre-livre. . . . .	78
5.24	ANPSD para o sistema do veio livre-livre. . . . .	79
5.25	Formas naturais de vibração identificadas do sistema veio livre-livre. . . . .	81
5.26	Variáveis de medição de ruído. . . . .	85
5.27	Comparação das respostas com e sem a presença de ruído. . . . .	86
5.28	ANPSD para o caso de estudo de 2GDL com ruído. . . . .	87
5.29	Comparação das respostas com ruído excessivo. . . . .	88
5.30	ANPSD para o sistema da viga simplesmente apoiada com ruído de medição. . . . .	89
5.31	Nova excitação aplicada ao sistema da viga simplesmente apoiada. . . . .	90
5.32	ANPSD para o sistema da viga simplesmente apoiada com nova excitação. . . . .	90

---

## Lista de Tabelas

---

3.1	Comparação da eficiência computacional entre os métodos DFT e FFT. . .	25
5.1	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 2GDL sem amortecimento. . . . .	55
5.2	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 2GDL sem amortecimento. . . . .	55
5.3	Vectoros modais obtidos experimentalmente para o caso de 2GDL sem amortecimento. . . . .	56
5.4	Vectoros modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso de 2GDL sem amortecimento. . . . .	56
5.5	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 2GDL com amortecimento. . . . .	58
5.6	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 2GDL com amortecimento. . . . .	58
5.7	Vectoros modais obtidos experimentalmente para o caso de 2GDL com amortecimento. . . . .	59
5.8	Erro relativo dos vectoros modais para o caso de 2GDL com amortecimento. . . . .	59
5.9	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 5GDL sem amortecimento. . . . .	62
5.10	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 5GDL sem amortecimento. . . . .	63
5.11	Vectoros modais obtidos experimentalmente para o caso de 5GDL sem amortecimento. . . . .	64
5.12	Vectoros modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso de 5GDL sem amortecimento. . . . .	64
5.13	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	66
5.14	Largura de banda do segundo e terceiro modo natural de vibração para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	67
5.15	Razões de amortecimento para o caso de 5GDL. . . . .	67
5.16	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	68
5.17	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	68
5.18	Vectoros modais obtidos experimentalmente para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	69
5.19	Erro relativo dos vectoros modais para o caso de 5GDL com amortecimento. . . . .	69
5.20	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o sistema da viga fixa-livre. . . . .	71

5.21	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso da viga fixa-livre. . . . .	72
5.22	Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso da viga fixa-livre. .	73
5.23	Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso da viga fixa-livre. . . . .	73
5.24	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o sistema da viga simplesmente apoiada. . . . .	75
5.25	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso da viga simplesmente apoiada. . . . .	75
5.26	Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso da viga simplesmente apoiada. . . . .	76
5.27	Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso da viga simplesmente apoiada. . . . .	76
5.28	Frequências naturais obtidas experimentalmente para o sistema do veio livre-livre. . . . .	79
5.29	Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o sistema do veio livre-livre. . . . .	80
5.30	Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso do veioLL. . . . .	80
5.31	Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o veio livre-livre.	80
5.32	Frequências naturais e erro relativo para o caso de 2GDL com ruído de medição.	86
5.33	Vectores modais para o caso de 2GDL com ruído de medição. . . . .	87
5.34	Erro relativo para o caso de 2GDL com ruído de medição. . . . .	88
5.35	Erro relativo para o caso de 2GDL com ruído excessivo. . . . .	89
5.36	Erro relativo para o sistema da viga simplesmente apoiada com ruído na medição. . . . .	91

---

## Abreviaturas

---

<b>ACDF/CFDA</b>	Abordagem Clássica no Domínio da Frequência / <i>Classical Frequency-Domain Approach</i> ;
<b>AME</b>	Análise Modal Experimental;
<b>AMO</b>	Análise Modal Operacional;
<b>ANPSD</b>	Média Normalizada da Densidade Espectral ( <i>Averaged Normalized Power Spectral Density</i> );
<b>AVT</b>	Teste de Vibração Ambiental ( <i>Ambient Vibration Test</i> );
<b>BFD</b>	Domínio da Frequência Básico ( <i>Basic Frequency Domain</i> );
<b>CFDA</b>	Abordagem Clássica no Domínio da Frequência ( <i>Classical Frequency-Domain Approach</i> );
<b>DE</b>	Densidade Espectral;
<b>DFT</b>	Transformada de Fourier Discreta ( <i>Discrete Fourier Transform</i> );
<b>ERA</b>	<i>Eigen Realization Algorithm</i> ;
<b>FC</b>	Função de Correlação;
<b>FDD</b>	Decomposição no Domínio da Frequência ( <i>Frequency-Domain Decomposition</i> );
<b>FFT</b>	Transformada Rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> );
<b>FRF</b>	Função de Resposta em Frequência;
<b>FT</b>	Função de Transferência;
<b>FVT</b>	Teste de Vibração Forçado ( <i>Forced Vibration Test</i> );
<b>GDL</b>	Grau(s) de Liberdade;
<b>ITD</b>	<i>Ibrahim Time Domain</i> ;
<b>MEF</b>	Método dos Elementos Finitos;
<b>NPSD</b>	Densidade Espectral Normalizada ( <i>Normalized Power Spectral Density</i> );
<b>SSI</b>	Identificação do Sub-espço Estocástico ( <i>Stochastic Subspace Identification</i> ).



---

## Nomenclatura

---

<b>Variáveis latinas</b>		$T$	período / tempo total de medição
		$x(t)$	deslocamento em função do tempo
$A(\omega)$	função aceleração	$\dot{x}(t)$	velocidade instantânea
$B_e$	largura de banda efectiva	$\ddot{x}(t)$	aceleração instantânea
$[c]$	matriz de amortecimento	$\bar{X}(i\omega)$	fasor do deslocamento
$c$	constante de amortecimento viscoso	$\{y\}$	vector resposta medida
$f(t)$	solicitação em função do tempo	$[Y]$	matriz resposta medida
$H(\omega)$	FRF genérica	$Y(\omega)$	função mobilidade
$k$	constante de rigidez elástica	<b>Variáveis gregas</b>	
$[k]$	matriz de rigidez	$\alpha(\omega)$	função receptância
$m$	massa	$\xi$	razão de amortecimento
$[m]$	matriz de massa ou inércia	$\sigma$	variância
$n$	número de graus de liberdade	$\tau$	intervalo de tempo
$N$	número de respostas medidas	$\omega$	frequência angular
$[\hat{R}]$	matriz das funções de correlação	$\omega_n$	frequência natural de vibração não amortecida
$[S]$	matriz das densidades espectrais		
$t$	variável tempo		
$\Delta t$	passo da variável tempo discretizada		

## Operadores matemáticos

$\dot{\bullet}$	primeira derivada em ordem ao tempo
$\ddot{\bullet}$	segunda derivada em ordem ao tempo
$\widetilde{\bullet}$	transformada de Fourier
$\widehat{\bullet}$	média aritmética
$\bullet^*$	complexo conjugado
$\{\bullet\}^T$	vector transposto
$[\bullet]^T$	matriz transposta
$i = \sqrt{-1}$	operador complexo



### Introdução

---

A análise do comportamento dinâmico de uma dada estrutura é essencial para se poder descrever o seu funcionamento. Hoje em dia, tendo em conta a necessidade de modelos de resposta cada vez mais precisos, uma análise teórica deve ser completada por um modelo experimental de forma a produzir uma representação o mais aproximada possível da realidade. Para complementar tais modelos, ou apenas para retirar as propriedades dinâmicas do elemento a estudar, é necessário efectuar uma análise modal do sistema. Por análise modal entenda-se a identificação de parâmetros modais de uma dada estrutura através da correlação entre as características dinâmicas do modelo matemático com as propriedades físicas do sistema retiradas experimentalmente.

No âmbito da análise de vibração de estruturas por via experimental, há dois métodos que se destacam: a Análise Modal Experimental (AME) e a Análise Modal Operacional (AMO). O Método dos Elementos Finitos (MEF) é também por vezes utilizado, mas a utilização do mesmo desprovida de análise complementar, especialmente experimental, peca por insuficiência de dados para a modelação de condições reais ou natureza do amortecimento [Grosel et al., 2014].

A principal diferença entre os métodos referidos (AME e AMO) é a forma de aplicação da excitação. Em AME, a excitação é conhecida e produzida artificialmente, sendo, por norma, provocada por um gerador de vibrações (*shaker*) ou aplicando uma excitação transiente (com um martelo de impacto por exemplo). Enquanto que em AMO, a excitação não é conhecida e é provocada pelo ambiente (correntes de vento ou água, trânsito pedonal ou de veículos, etc.). Esta diferença faz com que a AMO seja particularmente interessante para estruturas de grande porte, visto que não seria conveniente fabricar ou comprar equipamento capaz de provocar artificialmente excitações em estruturas como edifícios, aviões ou pontes. Mesmo para sistemas de menores dimensões, torna-se mais conveniente medir apenas a resposta do sistema ou elemento em análise enquanto este se encontra numa situação operacional, do que criar condições de teste extremamente controladas em que o *input* (excitação) e *output* (resposta) têm de ser completamente conhecidos.

Antes de partir para a descrição dos métodos de análise modal, é importante realçar o porquê da necessidade de realizar testes modais. Uma das principais razões deve-se à imprescindibilidade de obter as propriedades modais de um sistema (frequências naturais,

razões de amortecimento e formas de vibração), com o intuito de as comparar, ou até usar como complemento de determinado modelo de resposta definido teoricamente ou através do MEF. Assim, retirando a informação sobre os principais modos de vibração através de análise modal, é então possível validar ou complementar o modelo teórico.

Adicionalmente, também pode ser necessário determinar o comportamento do sistema quando este se encontra sujeito a diferentes tipos de cargas em diversos ambientes ou monitorizar em que condições se encontra a estrutura ao longo do tempo.

A análise modal também se revela particularmente interessante ao ser efectuada em componentes que serão incorporados numa estrutura. Conhecendo o seu comportamento dinâmico individualmente, é possível extrapolar a sua contribuição na resposta do sistema, algo que é extremamente útil quando o conjunto é de elevada complexidade ou quando se pretende alterar a forma do componente original e perceber quais serão as repercussões no sistema.

Ao longo do documento serão fornecidos conceitos essenciais do comportamento vibratório de estruturas de forma a clarificar a metodologia inerente à AME, que por sua vez será benéfica para uma melhor compreensão dos recursos a utilizar na AMO.

### 1.1 Motivação e Objectivos

A motivação que levou à elaboração do presente documento prende-se com a intenção de desenvolvimento de um método de teste alternativo para identificação das propriedades modais. O programa também é desenvolvido com o intuito de criar uma base de estudo na temática e futura melhoria do algoritmo ao longo dos próximos anos. Seguramente, o presente trabalho nunca se encontrará completamente finalizado, devido à complexidade do tema e à sua contínua evolução, mas servirá como ponto de partida para utilização do método de AMO, quer em estruturas mais complexas, quer em tipos de teste mais exigentes.

O principal objectivo da presente dissertação de mestrado é o desenvolvimento, implementação e validação de um procedimento capaz de obter os parâmetros modais de um sistema a partir de dados recolhidos experimentalmente. O procedimento seleccionado para se obter essas propriedades é uma análise modal operacional. Para tal, o algoritmo é executado no *software* computacional *MATLAB*<sup>®</sup> desenvolvido pela *MathWorks*<sup>®</sup> com o intuito de extrair a informação pretendida neste tipo de análise.

Para validar os resultados obtidos, é realizada uma análise teórica/analítica das propriedades dinâmicas espectáveis de se obter nas estruturas de teste e se estas são identificadas pelo algoritmo desenvolvido através do método de AMO. Adicionalmente, para testar o programa em condições de funcionamento reais, realiza-se uma simulação de respostas com a inclusão de ruído inerente a qualquer processo de medição.

Consoante os resultados obtidos na fase de validação e simulação, concluir-se-á sobre a fiabilidade e precisão do algoritmo desenvolvido.

## 1.2 Estrutura do Documento

A estrutura do documento encontra-se dividida em seis capítulos. O presente capítulo tem uma natureza introdutória no tópico de análise modal, contextualizando de uma forma superficial as temáticas do objecto em análise, para além de definir os objectivos e motivação por detrás do mesmo.

No segundo capítulo (2) trata-se de apresentar alguns conceitos de vibrações e aprofundar o estudo na matéria em questão, particularmente no enquadramento dos métodos de AME. Depois de uma análise dos conceitos base necessários para uma utilização mais proficiente da AME, segue-se a descrição do método e dos recursos necessários para a sua utilização.

O terceiro capítulo (3) apresenta o tema central da dissertação, a AMO. Aproveitando os conceitos apreendidos anteriormente, aborda-se o método de AMO, incluindo os conceitos matemáticos necessários à sua correcta utilização. Estando as bases teóricas estabelecidas, segue-se uma descrição da metodologia utilizada na elaboração do algoritmo, bem como a sua implementação em *MATLAB*®.

O capítulo seguinte (4) diz respeito aos casos de estudo em análise no presente trabalho. Os casos em questão são descritos e é apresentada a sua implementação no programa desenvolvido.

No quinto e penúltimo capítulo (5) apresentam-se os resultados obtidos ao longo dos diferentes processos, analisando-os e sendo os mesmos matéria de discussão para aferir a sua validade e pertinência.

Para finalizar, o sexto capítulo (6) apresenta as conclusões retiradas durante todo o processo, bem como possíveis trabalhos futuros a realizar tendo em conta alguns conselhos e deduções retirados no decorrer da presente dissertação.



### Análise Modal Experimental

---

A identificação dos parâmetros modais por via experimental tem sido um tópico de investigação ao longo das últimas seis décadas [Ewins, 2000]. Começou por ser utilizada em engenharia mecânica para caracterizar o comportamento dinâmico de estruturas relativamente pequenas, em ambientes altamente controlados, nomeadamente em laboratórios. Essa primeira abordagem, actualmente conhecida como Análise Modal Experimental (AME), é baseada na medição da resposta dinâmica da estrutura a uma ou várias solicitações também medidas. A partir da relação entre o *input* e o *output* do sistema, é, então, possível identificar os parâmetros modais do mesmo, fazendo com que este método também seja conhecido como *Input-Output Modal Analysis*.

Sendo que, em AME, a força dinâmica aplicada à estrutura é conhecida e imposta por equipamento estranho ao funcionamento normal do sistema, este tipo de análise é denominada como Teste de Vibração Forçado (*Forced Vibration Test*, FVT). Analogamente, em Análise Modal Operacional (AMO), sendo a excitação provocada por forças actantes no sistema durante o seu funcionamento normal, ou seja, pelo próprio ambiente, é um tipo de estudo intitulado como Teste de Vibração Ambiental (*Ambient Vibration Test*, AVT).

Antes de partir para a descrição da metodologia da AME, é importante notar que se deve dividir este tipo de análise em três requisitos distintos mas complementares [Ewins, 2000]:

- Base teórica de comportamento oscilatório;
- Medição precisa da resposta;
- Análise realística e detalhada da informação recolhida.

À primeira vista, pode parecer desnecessário um conhecimento profundo sobre os pontos referidos, mas apenas sendo proficiente nas três matérias se retira todo o potencial do processo de análise modal. Por exemplo, visto não haver uma metodologia óptima para todos os casos, surge a necessidade de utilizar equipamentos e criar condições de teste apropriadas para se efectuar um método de análise adequado a cada caso particular em questão. Por outro lado, se não houver um conhecimento teórico do que seria espectável na resposta do

sistema, pode levar a uma análise desnecessária de dados que não são representativos da realidade. Adicionalmente, se não for tido em consideração o tipo de excitação ou gama de amplitude da resposta pode levar a uma escolha indevida do equipamento de medição, o que leva a uma deturpação dos dados e da qualidades da análise.

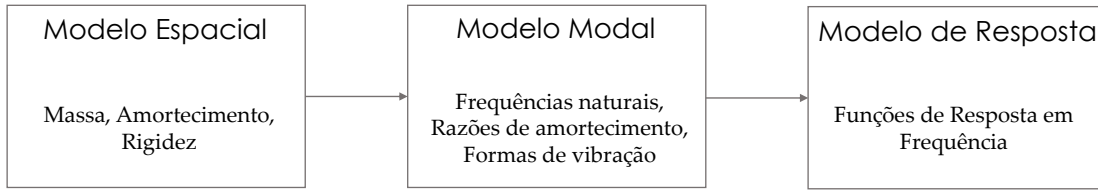
O método da AME é um processo amplamente estudado ao longo dos últimos sessenta anos [Ewins, 2000; Heylen et al., 1998; Maia and Silva, 1997], sendo objecto de discussão em inúmeras publicações e conferências ao longo desse período. Como tal, pelo menos em termos teóricos, tornou-se uma metodologia esmiuçada sem grande prospecção de descobertas revolucionárias que alterem o paradigma da mesma. Qualquer evolução que surja neste campo virá, provavelmente, a partir de melhorias tecnológicas nos elementos de medição e processamento de informação. Logo, pode-se concluir que é um método robusto e fiável, que produz resultados satisfatórios e representativos do comportamento dinâmico real de um sistema.

### 2.1 Fundamentos Teóricos

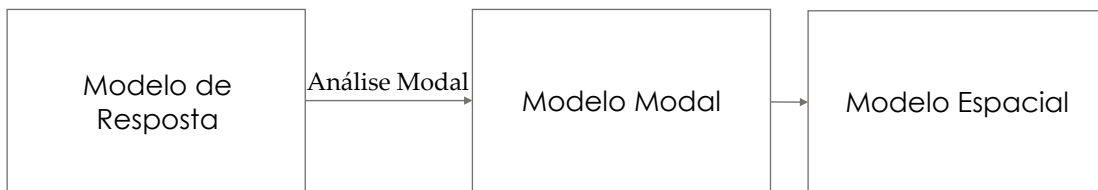
A presente secção apresenta a teoria relevante ao método de AME que será essencial para a compreensão das metodologias descritas posteriormente. Como já foi referido, é importante ter um bom conhecimento das bases teóricas de forma a estar apto a realizar uma análise modal adequada.

Antes de partir para a descrição da teoria, será apropriado contextualizar os diferentes passos a tomar numa análise teórica de um sistema vibratório. Como se pode ver na figura 2.1a, tipicamente, a primeira fase no processo teórico passa por determinar o modelo espacial, sendo este definido em termos das propriedades de massa ou inércia, amortecimento e rigidez. Seguidamente, efectuando uma análise modal ao modelo espacial, determina-se o comportamento da estrutura em termos dos seus modos de vibração, definidos através de um conjunto de frequências naturais com as correspondentes razões de amortecimento modal e formas naturais de vibração. O referido modelo, denominado modelo modal, descreve o comportamento do sistema em regime livre ou natural, i.e. sem a presença de uma solicitação exterior actuante no sistema, daí serem intitulados como modos naturais de vibração. Posteriormente à definição do comportamento do sistema em regime livre, surge a necessidade de determinar a resposta da estrutura a uma qualquer excitação. Obviamente, a resposta não depende apenas das propriedades intrínsecas do sistema, mas também da magnitude e natureza da força actuante no mesmo. Logo, tendo em conta a infinidade de soluções possíveis, torna-se conveniente definir o comportamento do sistema para uma solicitação *standard*, a partir da qual se pode determinar a solução para cada solicitação em particular. Este modelo é conhecido como modelo de resposta e descreve o comportamento do sistema através de um conjunto de funções de resposta em frequência (FRFs).

Os três tipos de modelos - Espacial, Modal e de Resposta - estão interligados entre si e são a base para os princípios de análise modal. Como já foi referenciado, a figura 2.1a demonstra que, a partir do modelo espacial é possível determinar o modelo de resposta, mas como podemos ver em 2.1b o processo inversamente análogo também o é, ou seja, a partir das propriedades da resposta determina-se os modos de vibração, e, no limite, as propriedades espaciais. Este percurso será o caminho a seguir na análise de vibrações experimentais.



(a) Percurso teórico



(b) Percurso experimental

Figura 2.1: Metodologia a seguir em análise de vibrações

Para se iniciar a descrição dos conceitos teóricos, é importante primeiro ter noção da distinção entre resposta livre ou natural e resposta forçada, sendo que o complemento de ambas representa a resposta total do sistema. Adicionalmente, será introduzido o estudo de vibrações para um grau de liberdade (GDL) de forma a perceber as suas características, para mais tarde se extrapolar para o caso mais geral de múltiplos GDL.

### 2.1.1 Sistemas com um gdl

A partir de uma análise da resposta livre de um sistema vibratório é possível retirar as propriedades modais do mesmo. No caso dos sistemas com um GDL, estas propriedades são a frequência natural e a razão de amortecimento. Um regime livre ou natural é caracterizado por uma ausência de excitação exterior, sendo a vibração provocada por uma perturbação inicial de deslocamento e/ou velocidade.

Na figura 2.2, encontra-se representado um modelo linear discreto em regime livre. Este sistema inclui um elemento de inércia de massa  $m$ , um mecanismo dissipador de energia de tipo viscoso de constante  $c$  e um elemento elástico de rigidez  $k$ , que se rege pela seguinte equação diferencial:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (2.1)$$

sendo  $x(t)$  o deslocamento instantâneo em função do tempo, que representa o GDL do

sistema. A velocidade  $\dot{x}(t)$  e aceleração  $\ddot{x}(t)$  são dadas pela primeira e segunda derivada de  $x(t)$ , respectivamente. A equação 2.1 é denominada de equação diferencial de movimento e representa um modelo matemático do sistema que descreve o seu movimento em função das propriedades de massa, amortecimento e rigidez. Este tipo de modelo é designado por modelo espacial.

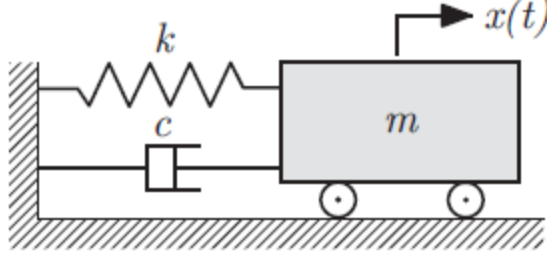


Figura 2.2: Sistema vibratório com um GDL em regime livre [Dias Rodrigues, 2014]

A equação diferencial de movimento (2.1) admite uma solução não trivial dada por:

$$x(t) = Ce^{st}, \quad (2.2)$$

em que  $C$  e  $s$  são quantidades complexas a determinar. Derivando duas vezes a resposta em ordem ao tempo e substituindo na equação 2.1, obtém-se a seguinte expressão algébrica:

$$(ms^2 + cs + k)Ce^{st} = 0. \quad (2.3)$$

Para a solução não trivial ( $C \neq 0$ ), obtém-se,

$$(ms^2 + cs + k) = 0, \quad (2.4)$$

A equação 2.4 é designada por equação característica da equação diferencial de movimento e é a partir das raízes da mesma que se retira a informação sobre o modelo modal. As propriedades modais retiradas através da equação característica são então [Dias Rodrigues, 2014]:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad \xi = \frac{c}{2\omega_n m}, \quad (2.5)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida e  $\xi$  é a razão de amortecimento, ou seja, as propriedades modais do sistema.

Depois de analisado o sistema em regime natural, surge a necessidade de descrever o comportamento do sistema a uma qualquer excitação. Como já foi referenciado, a resposta total do sistema em regime harmónico apresenta uma componente transitória, que corresponde a uma vibração livre ou natural do sistema, e uma componente particular,



representativa da vibração devido à excitação exterior e que se mantém enquanto esta se mantiver a actuar. Esta segunda componente da resposta é denominada como resposta permanente ou estacionária.

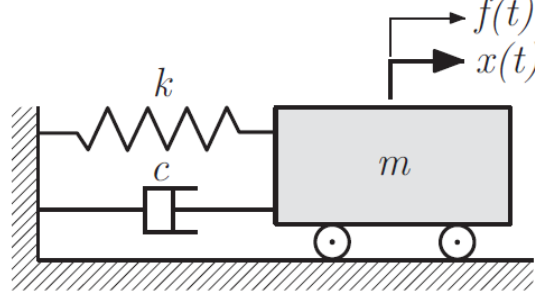


Figura 2.3: Sistema vibratório com um GDL em regime forçado [Dias Rodrigues, 2014]

Considerando o sistema representado na figura 2.3, sujeito a uma força harmónica  $f(t)$  dada por:

$$f(t) = Fe^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

onde  $F$  representa a amplitude da força e  $\omega$  a frequência da excitação. A equação diferencial de movimento é agora dada por:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = Fe^{i\omega t}. \quad (2.7)$$

Sendo solução particular  $x(t)$  da equação 2.7 dada por:

$$x(t) = \bar{X}(i\omega)e^{i\omega t}, \quad (2.8)$$

onde  $\bar{X}(i\omega)$  é designado como fasor de resposta. Derivando 2.8 duas vezes em ordem ao tempo e substituindo em 2.7, obtém-se a seguinte expressão:

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\bar{X}e^{i\omega t} = Fe^{i\omega t}. \quad (2.9)$$

Dividindo 2.9 pelo termo não nulo  $e^{i\omega t}$  e rearranjando a equação, obtém-se o modelo de resposta em frequência na forma de uma FRF do tipo receptância:

$$\alpha(\omega) = \frac{\bar{X}}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i\omega c}. \quad (2.10)$$

A FRF do tipo receptância é, então, uma função complexa de variável independente  $\omega$  que depende apenas das características do sistema  $(m, c, k)$ , sendo representativa do modelo

de resposta em frequência. Assim, a resposta permanente pode ser expressa em termos da função receptância como:

$$x(t) = \bar{X}(i\omega)e^{i\omega t} = F\alpha(i\omega)e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Alternativamente, utilizando a resposta em velocidade em vez de deslocamento, define-se a FRF do tipo mobilidade, a partir da razão entre o fasor da resposta seleccionada e a força aplicada. Derivando a resposta 2.2 em função do tempo, obtém-se:

$$\dot{x}(t) = i\omega\bar{X}(i\omega)e^{i\omega t} \quad (2.12)$$

e define-se função mobilidade como:

$$Y(i\omega) = \frac{i\omega\bar{X}(i\omega)}{F} = \frac{\bar{V}(i\omega)}{F} = i\omega\alpha(i\omega), \quad (2.13)$$

sendo, então, também possível representar a FRF do tipo mobilidade em função das propriedades espaciais. Pode-se ainda definir a FRF a partir da resposta em aceleração, sendo esta intitulada de função acelerância. Derivando a resposta em velocidade dada por 2.12 em ordem ao tempo,

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\bar{X}(i\omega)e^{i\omega t}, \quad (2.14)$$

e definindo a função acelerância como a razão entre o fasor da aceleração e a amplitude da força aplicada, obtém-se:

$$A(i\omega) = \frac{-\omega^2\bar{X}(i\omega)}{F} = \frac{\bar{A}(i\omega)}{F} = -\omega^2\alpha(i\omega). \quad (2.15)$$

Esta última representação do modelo de resposta (2.15) revela-se particularmente interessante, visto ser comum medir a aceleração como parâmetro de resposta nas actividades experimentais no âmbito da engenharia mecânica.

Visto que as FRF são funções complexas com uma variável independente (frequência,  $\omega$ ), existem três quantidades susceptíveis de serem representadas graficamente (magnitude, fase e frequência); logo, estas não podem ser completamente representadas no típico gráfico a duas dimensões  $x - y$ .

Então, por norma, para representar a FRF, é escolhida uma de três formas de representação:

- Diagrama de Bode;
- Parte real vs. frequência e parte imaginária vs. frequência;
- Diagrama de Nyquist.

O diagrama de Bode, representado de forma genérica na figura 2.4, apresenta o módulo de FRF vs. frequência e a fase também em função da frequência de excitação. Um dos problemas deste tipo de representação deve-se à necessidade de apresentar uma larga gama de valores com variações relativamente bruscas. Para contornar esse problema, é comum representar o gráfico da magnitude vs. frequência em escala logarítmica de forma a suavizar a variação da resposta em torno da ressonância.

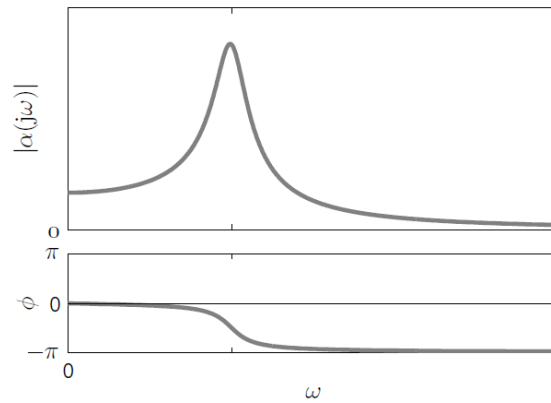


Figura 2.4: Diagrama de Bode exemplificativo para um GDL [Dias Rodrigues, 2014]

A segunda forma de representação gráfica de uma FRF é a menos utilizada das três e está exemplificada na figura 2.5. Este tipo de representação permite visualizar que a alteração de fase na região da ressonância é caracterizada pela mudança de sinal num dos gráficos e por um pico (máximo ou mínimo) no outro.

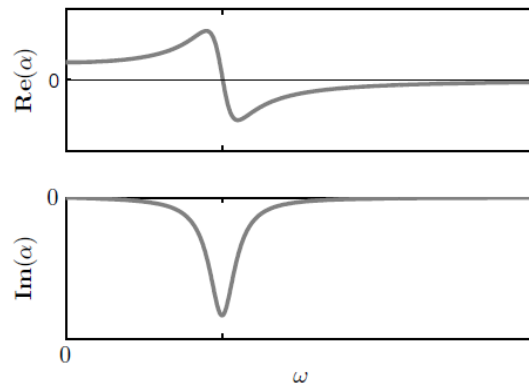


Figura 2.5: Representação gráfica exemplificativa da Parte real e imaginária em função da frequência [Dias Rodrigues, 2014]

O diagrama de Nyquist, (figura 2.6), representa a FRF no plano complexo (parte imaginária em função da parte real), sendo que a frequência não se encontra explicitamente representada, mas pode ser identificada através dos respectivos pontos na curva. Este tipo de representação revela-se particularmente interessante por apresentar a zona da ressonância com maior destaque. Adicionalmente, consoante o tipo de amortecimento, determinados tipos de FRF apresentam-se como circunferências perfeitas, sendo este facto extremamente útil em determinados tipos de análise.

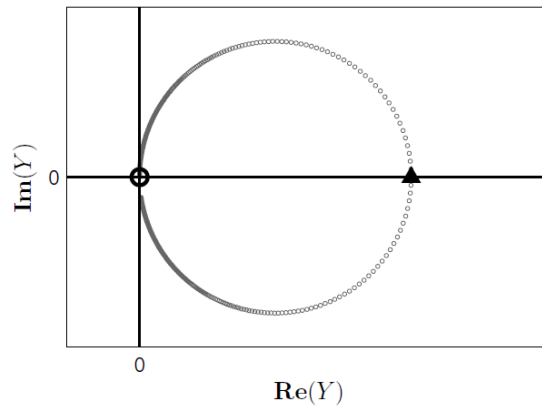


Figura 2.6: Diagrama de Nyquist genérico para um GDL [Dias Rodrigues, 2014]

Como já foi referido, os diagramas de um FRF são projecções a duas dimensões de uma representação tridimensional. A título ilustrativo, pode-se ver na figura 2.7 um gráfico a três dimensões de uma FRF para um GDL, bem como as projecções nos respectivos planos. Como se pode observar, a sua interpretação é mais complexa do que os casos descritos e seria ainda mais difícil consoante o aumento do número de GDL.

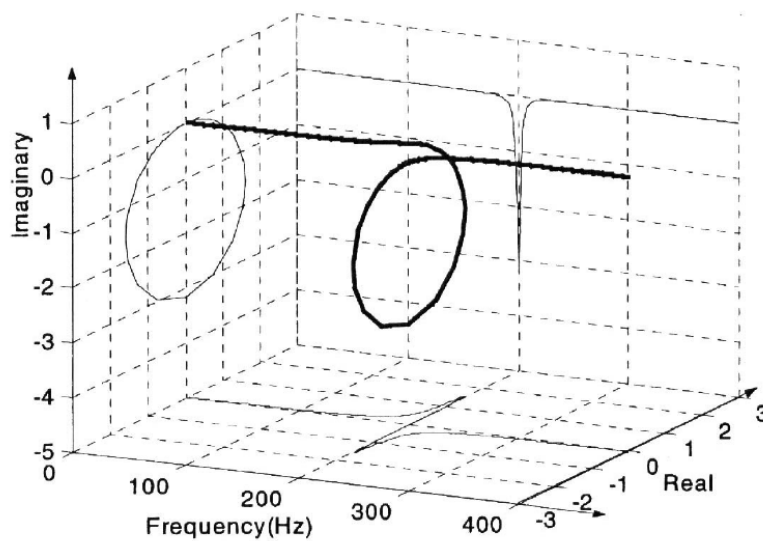


Figura 2.7: Representação de uma FRF a três dimensões [Ewins, 2000]

### 2.1.2 Sistemas com múltiplos gdl

Dado que os sistemas com um GDL são um caso muito particular na realidade, é necessário extrapolar para o caso mais geral de múltiplos GDL. Os fundamentos teóricos foram introduzidos para sistemas com um GDL porque os sistemas com mais do que um GDL podem ser representados como uma sobreposição linear de um determinado número de sistemas com um GDL. Sendo que esse número pode ser qualquer inteiro superior a um, os dados serão apresentados de forma genérica como vectores e matrizes de forma algo abstracta.

Então, para um sistema com  $n$  GDL, as equações diferenciais do movimento são dadas por:

$$[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = f(t), \quad (2.16)$$

em que  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$  são matrizes de dimensões  $n \times n$  de massa ou inércia, amortecimento e rigidez, respectivamente.  $\{x(t)\}$  e  $\{f(t)\}$ , são vectores  $n \times 1$  dependentes na variável tempo que representam o deslocamento e a excitação, respectivamente.

Com o intuito de simplificar o procedimento de obtenção dos restantes conceitos a expor, considerou-se que o sistema em análise não apresenta amortecimento. Assim sendo, estando o modelo espacial definido, segue-se então o modelo modal. Com esse intuito, partimos da solução da resposta livre para estabelecer as propriedades modais do sistema. Assumindo uma resposta do sistema dada por:

$$x(t) = \{X\}e^{i\omega t}, \quad (2.17)$$

sendo  $\{X\}$  um vector de dimensões  $n \times 1$  das amplitudes de resposta independente do tempo. Derivando 2.17 duas vezes em ordem ao tempo e substituindo na equação diferencial do movimento (sem amortecimento), obtém-se:

$$[[k] - \omega_i^2[m]] \{X\}e^{i\omega t} = \{0\}, \quad (2.18)$$

o que significa que, para o sistema admitir soluções não triviais ( $\{X\}e^{i\omega t} \neq 0$ ), o determinante da matriz dos coeficientes tem de ser nulo, isto é,

$$\Delta(\omega) = |[k] - \omega_i^2[m]| = 0. \quad (2.19)$$

A equação 2.19 é análoga a 2.4 mas para múltiplos GDL e é denominada de determinante característico. Partindo de 2.19 obtém-se uma equação polinomial de grau  $n$  em  $\omega^2$  designada equação característica ou de frequências. As raízes da equação de frequências ( $\omega_i^2, i = 1, \dots, n$ ) são soluções particulares de 2.18 e representam as frequências naturais não amortecidas. Caso o sistema apresentasse amortecimento, as frequências seriam frequências naturais de

vibração amortecidas e conteriam informação sobre o amortecimento presente no sistema. É pratica comum agrupar as frequências naturais numa matriz diagonal de dimensões  $n \times n$ , em que os elementos da diagonal principal são iguais ao quadrado das frequências naturais de vibração.

Substituindo cada uma das frequências naturais obtidas em 2.18, obtém-se um conjunto de valores relativos para  $\{X\}$  denominado de vector modal. É importante notar que os vectores obtidos são definidos a menos de uma constante; logo, não são soluções únicas do sistema homogêneo. Contrariamente, os valores obtidos para as frequências são únicos. Agrupando os vectores modais obtidos por coluna numa matriz, obtém-se a designada matriz modal. Por norma, é comum normalizar os vectores modais para massas modais unitárias, tornando assim a matriz modal única para cada sistema.

Resolvendo o problema da resposta livre obtém-se então duas matrizes com as propriedades modais do sistema: uma matriz  $[\lambda^2]$  que é uma matriz diagonal  $n \times n$  (sendo  $n$  o número de GDL do sistema) com informação sobre as frequências naturais e razões de amortecimento; e uma matriz  $[\Phi]$ , também de dimensões  $n \times n$ , em que cada coluna  $n$  representa um vector modal associado ao elemento  $n \times n$  da matriz  $[\lambda^2]$ .

Tendo as propriedades modais do sistema, a seguinte etapa da análise teórica é uma análise da resposta forçada do sistema. Neste passo é determinada a função de resposta em frequência, denominada de forma genérica como  $[H(\omega)]$ . Contrariamente às matrizes referidas anteriormente, os elementos constituintes da matriz da FRF não são constantes. Como a matriz FRF é dependente da frequência de excitação, cada elemento  $H_{ij}(\omega)$  representa a resposta  $X_j$ , no GDL  $j$ , sujeito a uma excitação  $F_k$  no GDL  $k$ . Tanto a resposta como a excitação são grandezas complexas que incluem informação sobre a fase e magnitude, o que por sua vez torna a FRF também numa grandeza complexa.

Uma FRF é descrita pela razão entre a resposta e a excitação por uma questão de oportunidade, visto que estas seriam as grandezas mais convenientes de medir na prática. Também se pode descrever a FRF em função dos constituintes mássicos, de amortecimento e de rigidez do sistema, no entanto a elevada complexidade das expressões a utilizar torna-se um obstáculo. Utilizando as propriedades modais do sistema em detrimento das propriedades espaciais, obtém-se uma expressão simples e concisa para  $H_{ij}(\omega)$ , que tem a forma geral [Ewins, 2000]:

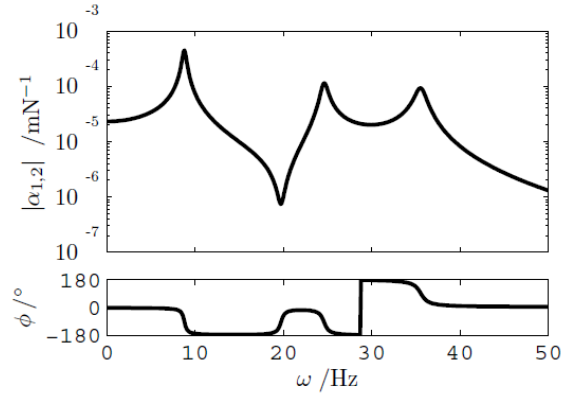
$$H_{jk}(\omega) = \frac{X_j}{F_k} = \sum_{r=1}^n \frac{\phi_{jr}\phi_{kr}}{(\lambda_r^2 - \omega^2)}, \quad (2.20)$$

onde  $\phi_{ij}$  é o elemento da linha  $i$  e coluna  $j$  da matriz  $[\Phi]$ , e representa a componente do GDL  $i$  para a forma natural de ordem  $j$ ,  $\lambda_r^2$  o elemento  $r$  da matriz diagonal  $[\lambda^2]$  e  $\omega^2$  é o quadrado da frequência de excitação.

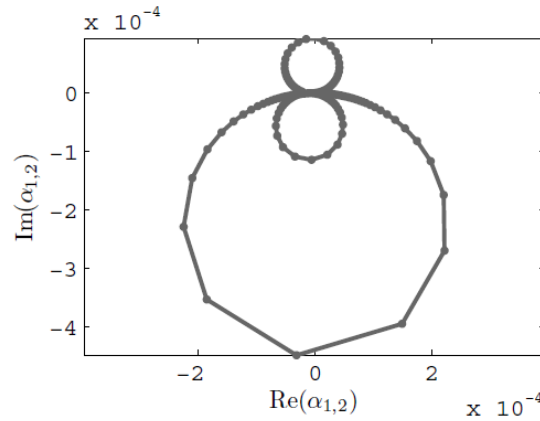
A equação 2.20 é uma base fundamental para a análise modal visto que representa uma relação entre as propriedades modais do sistema e a resposta do mesmo a determinada excitação. Tal relação revela-se extremamente útil visto que, de um ponto de vista teórico, permite a previsão da resposta a uma solicitação desde que sejam conhecidas as propriedades dinâmicas do sistema; já de um ponto de vista prático, é possível determinar as propriedades

modais do sistema a partir das grandezas mensuráveis da excitação e da resposta.

Tal como no caso de um GDL, as FRF são normalmente representadas em diagramas de Bode e Nyquist. As seguintes figuras apresentam representações gráficas genéricas das FRF para múltiplos GDL.



(a) Diagrama de Bode



(b) Diagrama de Nyquist

Figura 2.8: Representações exemplificativas de uma FRF para múltiplos GDL [Dias Rodrigues, 2016]

Após a descrição dos diferentes passos a seguir para se efectuar uma análise teórica torna-se evidente o porquê da sua importância. A partir de uma primeira abordagem teórica pode-se então prever qual será a resposta expectável de se obter na prática e, de uma forma qualitativa, determinar a pertinência dos dados obtidos experimentalmente.

## 2.2 Técnicas de Medição

Na presente secção será introduzido o tema dos métodos de medição utilizados em análise modal experimental. Na figura 2.9 estão representados os principais componentes a serem utilizados para medir as FRF. Como foi visto no capítulo anterior, as propriedades do sistema podem ser determinadas através das FRF, que por sua vez podem ser obtidas a partir da medição da excitação e da resposta do elemento a ser testado. Logo, quão

melhor for a qualidade das grandezas medidas, mais representativo da realidade serão as propriedades modais determinadas. Para tal efeito, há que ter especial atenção a três aspectos do processo de medição [Ewins, 2000]:

- Os apoios e excitação a actuar na estrutura a ser testada;
- Transdutores adequados às grandezas a serem medidas;
- Processamento de sinal apropriado para o tipo de teste a ser executado.

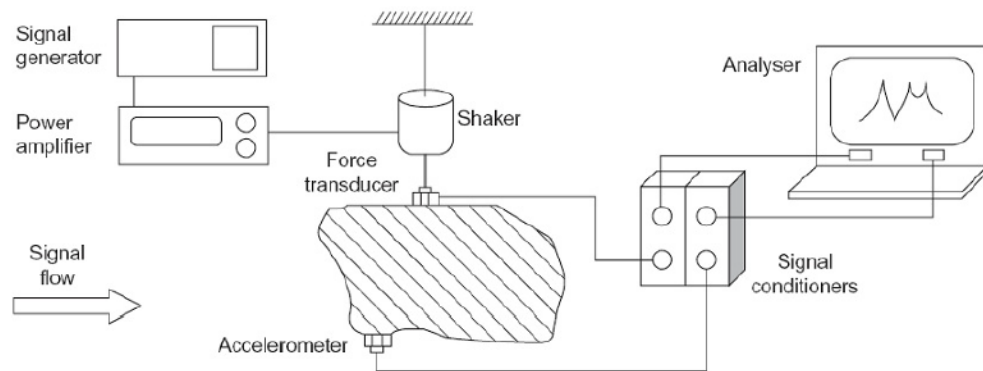


Figura 2.9: Equipamento de medição típico em análise modal [Dias Rodrigues, 2016]

No primeiro ponto deparamos-nos com a necessidade de definir correctamente o tipo de condições fronteira a que o elemento a ser testado se encontra sujeito e o tipo de excitação actuante no mesmo. Para os apoios, existem três tipos de ligações normalmente utilizados: livre, onde não existe restrição na direcção da excitação; encastrado, que representa um acoplamento rígido onde não são permitidos deslocamentos ou rotações; e *in situ* (local), onde o elemento a ser testado se encontra ligado a uma estrutura ou componente através de um acoplamento não-rígido. A escolha sobre o tipo de ligação a sujeitar o material a ser testado depende de vários factores como a necessidade de ser representativo das condições reais de funcionamento ou para corroborar com as condições do modelo teórico.

Para o tipo de força a actuar no mecanismo é comum escolher-se entre dois tipos de excitação: harmónica, através de um gerador de vibrações, ou *shaker*; ou transiente, utilizando um martelo de impacto ou libertando-o de uma posição deformada. Ambos os tipos de excitação apresentam vantagens e desvantagens e a sua escolha pode ser muito importante consoante o caso em estudo.

Os transdutores são elementos de elevada importância no ensaio, visto ser essencial obter medições o mais próximo possível da realidade. Pequenas imprecisões na leitura dos dados podem levar a erros que mais tarde serão continuados e exacerbados ao longo de todo o processo de análise, culminando em soluções que não sejam aceitáveis. Actualmente, os transdutores piezoeléctricos são os mais utilizados tanto para detectar a força actuante como a aceleração. As maiores preocupações a ter com a sua utilização são para tentar garantir uma interferência o mais reduzida possível e que a sua escolha seja adequada em termos da escala de frequência e de amplitude de resposta.



É também fundamental um processamento de sinal adequado para cada tipo de análise em questão. É exequível realizar medições directamente, aplicando uma excitação harmónica e medindo a resposta que também será harmónica. Este tipo de teste é denominado como 'teste de onda seno/sinusoidal e a escala de frequências pretendida é obtida passando de uma frequência para a seguinte ou fazendo um varrimento gradual da escala. O problema com este tipo de análise é que se torna um processo moroso consoante a grandeza da escala, e restrito para um número de frequências bem definido. Graças ao processamento de sinal, este tipo de análise tem vindo a ser substituído por excitações transientes e aleatórias, situações mais representativas de condições reais de funcionamento. Para tal, processadores de sinal complexos utilizam séries e transformadas de Fourier para aproximar os resultados medidos à soma de funções trigonométricas mais simples e, desta forma, deduzir os parâmetros necessários para transformar a excitação e resposta numa soma de harmónicos. Assim, o tempo de teste pode ser amplamente reduzido e uma grande escala de frequências varrida de uma forma simples e compacta. No entanto, é necessário ter atenção ao tipo e aplicabilidade do processamento a utilizar devido ao grande número de passos onde podem ocorrer erros que serão transportados para o resto da análise.

Como foi visto, as diferentes técnicas e opções tomadas no processo de medição podem ter uma influência significativa na análise modal, mesmo tratando-se da mesma peça em estudo. A figura seguinte demonstra a variação dos dados obtidos numa peça de teste *standard*.

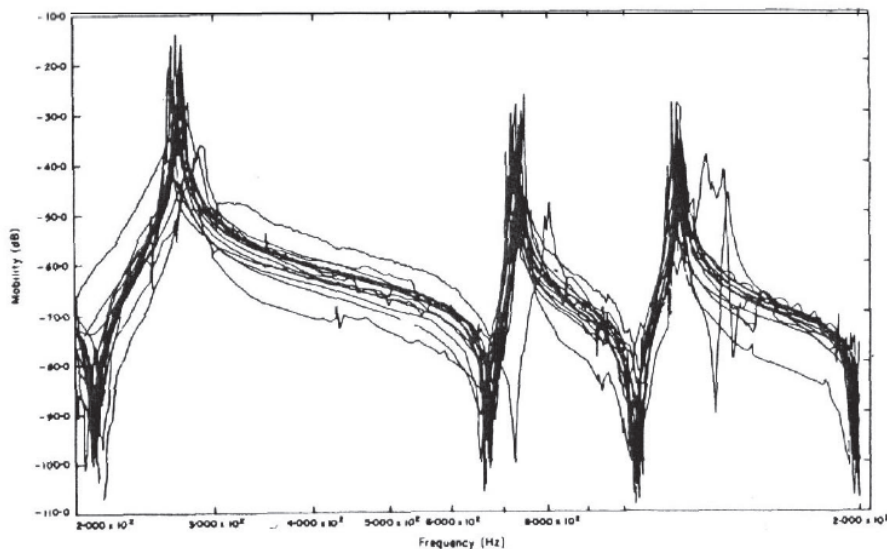


Figura 2.10: Variação dos dados obtidos em diferentes condições na mesma peça de teste [Ewins, 2000]

Assim sendo, como se pode ver em 2.10, a importância de uma medição precisa é ainda mais elevada na análise modal do que na maioria dos casos devido à grande variabilidade de resultados

## 2.3 Análise dos Dados

Depois de efectuada a recolha dos dados no processo de medição é necessário analisá-los; logo, a presente secção tem como objectivo introduzir essa análise dos dados. Este procedimento é realizado com o intuito de aproximar os dados obtidos experimentalmente com um modelo teórico adequado que seja representativo do seu comportamento real. Para o efeito, o processo de análise passa por dois estágios: primeiro, identificar um modelo apropriado para o caso em estudo; segundo, determinar os parâmetros adequados ao modelo. Na grande maioria dos casos, a maior dificuldade encontra-se nesse segundo passo, denominado por 'extração de parâmetros modais' ou simplesmente 'análise modal'.

Como foi referido anteriormente, é possível antecipar a forma do gráfico da FRF e que a forma do mesmo depende das propriedades modais do sistema. Então, o principal objectivo da análise modal passa por identificar os parâmetros da equação da FRF, como a expressão 2.20, correspondendo-os com as FRF medidas, obtendo desta forma as propriedades modais do sistema. Este processo é normalmente denominado como *curve-fitting*.

Pode-se fazer um *curve-fitting* adequado a todos os casos mas torna-se um processo pouco eficiente. Por exemplo, utilizando a equação

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{A_r}{(\lambda_r^2 - \omega^2)}, \quad (2.21)$$

em que  $A_r$  é designado por constante modal, pode-se fazer um *curve-fit* aos valores medidos de  $H(\omega_1)$ ,  $H(\omega_2)$ , ...,  $H(\omega_n)$  e, desta forma, obter estimativas para os coeficientes  $A_1$  até  $A_n$  e  $\lambda_1^2$  até  $\lambda_n^2$ . Os valores obtidos serão aproximados às propriedades modais do sistema, mas será um processo ineficiente que não toma em consideração a possibilidade de haver duas ressonâncias muito próximas (o que leva à sobreposição de modos de vibração), nem a variabilidade da qualidade dos pontos medidos nas diferentes frequências de ressonância. Tais erros podem levar a um decréscimo da qualidade geral do processo de análise, o que faz com que não se deva utilizar um único método para todos os casos, mas sim uma seleção adequada ao objecto de estudo em questão.

Um dos métodos mais utilizados nesta análise é o *circle-fit*. Como já foi referido, a representação de uma FRF para um GDL através do diagrama de Nyquist aproxima-se a uma circunferência. No caso de múltiplos GDL, o mesmo acontece se se considerar apenas as frequências nas redondezas de cada frequência natural. Logo, a partir de pontos discretos da FRF, executando um *circle-fit*, obtém-se assim uma representação contínua que descreva o comportamento dos pontos medidos. A figura 2.11 demonstra a título exemplificativo o procedimento descrito. Repetindo o processo para cada ressonância, retira-se informação suficiente para se poder recriar um modelo da FRF.

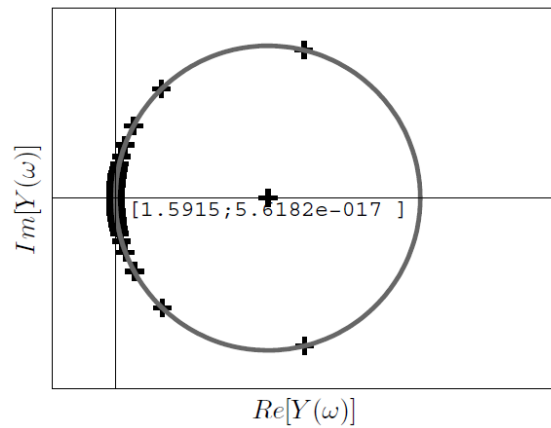


Figura 2.11: Método de análise *circle-fit* [Dias Rodrigues, 2016]

Os métodos descritos primam pela simplicidade e podem ser utilizados em variados casos de estudo, mas pecam quando existe sobreposição de modos de vibração. Nesses casos, existem métodos mais complexos que tomam em consideração a influência simultânea de mais que um modo de vibração. Aliada à acrescida complexidade, acarretam também um maior esforço computacional, mas, assumindo precisão dos dados recolhidos, esses métodos reproduzem com melhor qualidade os coeficientes das equações, que por sua vez se traduzem em propriedades modais do sistema mais precisas.

Apesar das diferentes nuances entre os métodos de análise modal, estas partilham um pressuposto transversal à grande maioria dos casos, sendo o objectivo determinar, através de *curve-fitting*, as propriedades modais que melhor caracterizam o comportamento vibratório da estrutura testada.



### Análise Modal Operacional

---

O campo da engenharia que estuda as propriedades modais de um sistema em funcionamento normal é denominado Análise Modal Operacional (AMO). AMO é um método de caracterização das propriedades dinâmicas de uma estrutura elástica através da identificação dos seus modos naturais de vibração a partir das suas condições de funcionamento. A principal vantagem da AMO é o facto de não ser necessário conhecer a excitação actuante no sistema, ou seja, não será produzida nem medida uma força para testar o sistema em questão. Ao invés, a excitação é provocada pelo próprio ambiente em que o sistema se encontra inserido, fazendo com que não seja necessário interromper o seu funcionamento para se efectuar a análise modal; surgindo daí o nome análise modal Operacional. Tal facto apresenta-se como uma grande vantagem por dois motivos: primeiro, permite o funcionamento e utilização do sistema de forma ininterrupta; segundo, não é necessária a utilização, ou até mesmo construção, de um gerador de vibrações capaz de excitar uma estrutura de grande porte. Tanto uma vantagem como outra representam uma diminuição considerável no tempo e custos envolvidos na análise modal do sistema. Outra vantagem deste aspecto é o facto de, sendo a análise realizada em condições de funcionamento, qualquer não linearidade na resposta estará associada à banda de frequência a que o sistema será excitado na prática e não a uma situação hipotética de funcionamento.

Contudo, nem tudo são vantagens. Visto que a AMO é preferencialmente utilizada em estruturas de grandes dimensões e a excitação é provocada pelas próprias condições operacionais do sistema, a excitação é, por norma, de baixa frequência. Deparamos-nos então com um dos primeiros inconvenientes do método, que é a necessidade de utilizar sensores extremamente sensíveis que produzam o mínimo de ruído possível. Mesmo com essa consideração, o rácio entre os dados recolhidos e o ruído presente nos mesmos terá de ser inferior ao de testes convencionais, o que implica a necessidade de um maior cuidado no tratamento de dados para evitar que se considere, de forma errada, que algumas características da excitação sejam confundidas com o comportamento dinâmico da estrutura a ser testada. Adicionalmente, existe a possibilidade de não se excitar toda a banda de frequências pretendidas, especialmente se a estrutura for muito rígida e apresentar frequências naturais elevadas. Finalmente, o facto de não se conhecer a excitação actuante no sistema faz com que o processo de identificação não providencie vectores modais normalizados para massas unitárias, algo que pode ser inconveniente, mas pode ser ultrapassado [Brincker and Ventura, 2015].

Visto que o método de AME tem alicerces completamente cimentados, muitos dos algoritmos utilizados em AMO baseiam-se em técnicas utilizadas na AME; logo, os dois métodos partilham muitas das mesmas bases teóricas. Como a principal diferença entre os métodos está na formulação do tipo de excitação actuante no sistema, é necessário um pré-processamento de dados alternativo para a AMO. Tendo em conta que a excitação em AME é determinística e em AMO aleatória, a informação sobre a carga aplicada é substituída pela premissa que esta pode ser representada através de um processo estocástico, ou seja, é uma aproximação a ruído branco. Isto significa que a energia é distribuída ao longo de uma larga gama de frequências e que não contém informação específica. Na prática, a excitação não necessita de apresentar características perfeitamente aproximadas a ruído branco, desde que todos os modos de vibração sejam devidamente excitados para que as suas contribuições sejam refletidas na resposta [Rainieri and Fabbrocino, 2014].

Tal como em AME, após a recolha dos dados é necessário proceder ao seu tratamento. A diferença é que, como a força actuante é desconhecida, não é possível calcular as FRFs como a razão entre a resposta e a excitação. Então, o método de AMO baseia-se na utilização de funções de correlação e funções de densidade espectral determinadas a partir da resposta medida. Para o efeito, os métodos a utilizar podem ser divididos em dois grandes grupos de modelos de sistemas dinâmicos, os estabelecidos no domínio do tempo e os no domínio da frequência.

O presente capítulo tem como intuito expor os conhecimentos necessários para a utilização dos métodos de AMO bem como as suas metodologias. Também se deve ter em conta que os modelos apresentados podem ser contínuos ou discretos, sendo que os contínuos são utilizados em modelos analíticos, ou seja, teóricos, e os discretos em modelos experimentais, visto que os dados recolhidos são sempre de natureza discreta. Para finalizar o capítulo, será dada uma descrição da metodologia utilizada na elaboração do algoritmo de AMO, bem como o procedimento para a sua implementação no *software MATLAB*®.

## 3.1 Conceitos Teóricos

Numa primeira instância, serão abordados os conceitos teóricos necessários a uma apta utilização dos métodos de AMO, para depois ser explicado o procedimento de alguns desses métodos. Como já foi referido, os métodos de AMO dividem-se em dois grandes grupos: os do domínio do tempo e os do domínio da frequência. Um conceito fundamental a cada um dos métodos é o tipo de tratamento que a resposta sofre antes de se proceder ao método em si, i.e., o pré-processamento envolvido em cada tipo de domínio. No domínio do tempo, utilizam-se as funções de correlação das respostas medidas, enquanto no domínio da frequência são utilizadas as respectivas densidades espectrais.

### 3.1.1 Função de Correlação

As funções de correlação (FC) são um aspecto fulcral em AMO. É a partir das mesmas que se inicia todo o processo de tratamento de dados e consequente análise, que permite a utilização de determinadas metodologias para extrair os parâmetros modais da estrutura

a ser estudada. Assim sendo, em AMO, há duas premissas assumidas em relação às FC. Primeiro, a FC extrai toda (ou quase toda) a informação sobre as características modais do sistema a partir dos dados recolhidos; segundo, as FC podem ser vistas como respostas livres do sistema [Brincker and Ventura, 2015].

Para determinar as FC existe uma panóplia de escolhas, sendo que, no presente documento, apenas será descrito o método de cálculo directo. Este método é simples e directo, mas não é o método mais eficiente em termos computacionais, algo que pode ser especialmente problemático quando o número de GDL a estudar for elevado. Os diferentes métodos de determinação das FC podem ser vistos na bibliografia adequada para o caso (ver Newland [2005], Thomson and Dahleh [1997] e Papoulis and S.U. [2002]).

### Método Directo

Uma FC é, como o nome indica, uma função que traduz a relação entre dois sinais. Esta relação, que pode ser expressa em função do tempo, pode descrever a relação entre um mesmo sinal separado de um determinado intervalo de tempo  $\tau$ , sendo uma função de auto-correlação, ou traduzir a relação entre dois sinais distintos, sendo uma função de correlação cruzada. Em AMO, o objectivo é o de obter uma matriz de FC em que todos os GDL medidos estão correlacionados entre si. Tendo então, um vector de resposta, medido durante um determinado período de tempo  $T$ ,  $\{y(t)\} = \{y_1(t), y_2(t), \dots\}^T$ , calcula-se a matriz FC através da equação [Brincker and Ventura, 2015]:

$$[\hat{R}(\tau)] = \frac{1}{T} \int_0^T \{y(t)\} \{y(t+\tau)\}^T dt, \quad (3.1)$$

sendo que os elementos da diagonal principal são funções de auto-correlação e os restantes são funções de correlação cruzada. No entanto, como o sinal apenas é conhecido no intervalo  $t \in [0, T]$ , a integração não pode ser realizada no intervalo definido porque o integrando  $t+\tau$  excede o limite de integração quando  $\tau \neq 0$ . Então, reduzindo o intervalo de integração obtém-se:

$$[\hat{R}(\tau)] = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \{y(t)\} \{y(t+\tau)\}^T dt. \quad (3.2)$$

Tendo em conta que os dados recolhidos são uma grandeza discreta no tempo, a equação 3.2 torna-se um somatório e o segmento de integração infinitesimal de tempo é substituído pelo passo de medição  $\Delta t$ , logo:

$$\begin{aligned}
\left[\widehat{R}(k)\right] &= \frac{1}{(N-k)\Delta t} \sum_{r=1}^{N-k} \{y(r)\} \{y(r+k)\}^T \Delta t \\
&= \frac{1}{(N-k)} \sum_{r=1}^{N-k} \{y(r)\} \{y(r+k)\}^T,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde  $N$  é o número de respostas medidas durante o período  $T$ ,  $k$  corresponde ao intervalo  $\tau = k\Delta t$  e o limite imposto  $(N-k)\Delta t$  corresponde a  $T - \tau$  da equação 3.2. Sendo a resposta discreta, os vectores  $\{y(r)\}$  são na realidade  $\{y(r\Delta t)\}$ . Pode-se, então, organizar os vectores resposta como colunas de uma matriz  $[Y] = [\{y(1)\}, \{y(2)\}, \dots]$ . Assim, a matriz FC obtida pelo método directo da equação 3.3 pode ser reescrita como:

$$\left[\widehat{R}(k)\right] = \frac{1}{N-k} [Y]_{(1:N-k)} [Y]_{(k+1:N)}^T, \tag{3.4}$$

onde  $[Y]_{(1:N-k)}$  representa a matriz da resposta  $[Y]$  sem as  $k$  últimas colunas, i.e. medições, e  $[Y]_{(k+1:N)}^T$  representa a mesma matriz  $[Y]$  mas sem as  $k$  primeiras medições.

Visto que o número de respostas medidas e o número de GDL a medir pode ser muito elevado, as matrizes descritas anteriormente podem ter dimensões consideráveis, e efectuar cálculos com matrizes de grandes dimensões pode requerer um poder computacional elevado. Sempre que possível, o método descrito é preferível devido à sua simplicidade e reduzida manipulação dos dados; contudo, pode ser visto na bibliografia descrita anteriormente outras técnicas de determinação das FC que minimizem os tempos de cálculo.

### 3.1.2 Densidade Espectral

A densidade espectral (DE) é outro aspecto de grande relevo no método de AMO. É a partir deste tipo de funções que se passa do domínio do tempo para o domínio da frequência. Para além de ser um passo essencial na utilização de técnicas no domínio da frequência, também é considerado boa prática a inspecção gráfica das funções de DE para ver se os "picos" próximos das ressonâncias se encontram explicitamente presentes.

Existem vários métodos para a determinação das funções de DE, mas tal como anteriormente, apenas o método da Transformada Rápida de Fourier (*Fast Fourier Transform*, FFT) será descrito. Novamente, os diferentes métodos existentes podem ser vistos na bibliografia adequada (ver [Newland \[2005\]](#), [Rainieri and Fabbrocino \[2014\]](#) e [Brandt \[2011\]](#)).

Inicialmente, o método utilizado para determinar a densidade espectral era o de cálculo directo. O método baseia-se na aplicação da Transformada de Fourier Discreta (*Discrete Fourier Transform*, DTF) à matriz das FC para se obter a matriz de DE. Até ao final dos anos 60, essa era a metodologia utilizada, visto que segue o caminho matematicamente formal de definir o espectro como a transformada de Fourier da função de correlação.



Contudo, quando surgiu o método da FFT o paradigma mudou. Em vez de ser necessário calcular primeiro a matriz das FC e depois aplicar a DFT às mesmas, o método da FFT determina a DE directamente a partir dos dados recolhidos. Este método, para além de eficiente, é mais rápido e preciso do que o método directo e será o utilizado no presente trabalho.

### Transformada Rápida de Fourier - FFT

A FFT é um algoritmo computacional para calcular a DFT. Dado um determinado sinal  $\{y(r)\}$  com  $r = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , a sua DFT é dada por [Newland, 2005]:

$$\{\tilde{y}(k)\} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \{y(r)\} e^{-i2\pi kr/N} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.5)$$

Trabalhando com a equação 3.5, será necessário efectuar as  $N$  multiplicações de  $\{y(r)\} e^{-i2\pi kr/N}$  para os  $N$  valores de  $\{\tilde{y}(k)\}$ , ou seja, seriam realizadas  $N^2$  operações. O método de FFT reduz o número de cálculos para a ordem de  $N \log_2 N$ . Como podemos ver a partir da tabela 3.1, esta metodologia oferece uma redução muito significativa da carga e tempo requerido ao processamento computacional. Adicionalmente, visto haver um número de operações mais reduzido, a precisão do cálculo será superior devido a um menor número de erros de truncatura e arredondamento.

Tabela 3.1: Comparação da eficiência computacional entre os métodos DFT e FFT [Newland, 2005].

$N$	$N^2 / N \log_2 N$
4	2
16	4
64	10.7
256	32
1 024	102.4
4 096	341.3
16 384	1 170.3
65 536	4 096
262 144	14 563.3
1 048 576	52 428.8

A metodologia da FFT passa por repartir a sequência inicial de valores  $\{y(r)\}$  em segmentos mais reduzidos com o intuito de os tratar individualmente e, assim, reduzir o número de cálculos a realizar. Para potenciar este efeito, o tamanho da sequência  $N$  das medições efectuadas deve ser uma potência de 2, i.e.,  $N = 2^n$  em que  $n$  é um inteiro positivo. Desta forma, é então possível repartir a sequência inicial em duas metades, para de seguida dividir cada metade em quartos e assim continuamente, até que as últimas sub-sequências apenas contêm um termo. Tendo então um sinal  $\{x(r)\}$  com  $r = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ , dividido em duas sequências  $\{y(r)\}$  e  $\{z(r)\}$  de tal forma que:

$$\begin{aligned} \{y(r)\} &= \{x(2r)\} \\ r &= 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1), \\ \{z(r)\} &= \{x(2r + 1)\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

em que  $\{y(r)\}$  representa os valores par da sequência original e  $\{z(r)\}$  os ímpar. As DFT das sub-sequências são então:

$$\begin{aligned} \{\tilde{y}(k)\} &= \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{N/2-1} \{y(r)\} e^{-i \frac{2\pi k r}{N/2}} \\ k &= 0, 1, 2, \dots, (N/2 - 1). \\ \{\tilde{z}(k)\} &= \frac{1}{N/2} \sum_{r=0}^{N/2-1} \{z(r)\} e^{-i \frac{2\pi k r}{N/2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Repartindo a sequência original  $\{x(r)\}$ :

$$\{\tilde{x}(k)\} = \frac{1}{N} \left( \sum_{r=0}^{N/2-1} \{x(2r)\} e^{-i \frac{2\pi k 2r}{N}} + \sum_{r=0}^{N/2-1} \{x(2r + 1)\} e^{-i \frac{2\pi k (2r+1)}{N}} \right), \quad (3.8)$$

e substituindo por 3.6, então:

$$\{\tilde{x}(k)\} = \frac{1}{N} \left( \sum_{r=0}^{N/2-1} \{y(r)\} e^{-i \frac{2\pi k r}{N/2}} + e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \sum_{r=0}^{N/2-1} \{z(r)\} e^{-i \frac{2\pi k r}{N/2}} \right), \quad (3.9)$$

que se pode rescrever como:

$$\{\tilde{x}(k)\} = \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} + e^{-i \frac{2\pi k}{N}} \{\tilde{z}(k)\} \right), \quad (3.10)$$

para valores de  $k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1$ . Assim, é então possível obter a DFT do sinal original a partir das suas sub-sequências. A equação 3.10 representa o princípio base do método da FFT. Contudo, apenas é aplicável para  $0 \leq k \leq (N/2 - 1)$ , ou seja, apenas para metade da sequência original. Então, aproveitando o facto de  $\{\tilde{y}(k)\}$  e  $\{\tilde{z}(k)\}$  serem grandezas periódicas em  $k$  que se repetem com um período  $N/2$  [Newland, 2005], de tal forma que:

$$\begin{aligned} \{\tilde{y}(k - N/2)\} &= \{\tilde{y}(k)\} \\ \{\tilde{y}(k - N/2)\} &= \{\tilde{z}(k)\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

A FFT para  $k$  de 0 até  $N - 1$  é dada por:

$$\begin{aligned}\{\tilde{x}(k)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \{\tilde{z}(k)\} \right) \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \{\tilde{x}(k)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k - N/2)\} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \{\tilde{z}(k - N/2)\} \right) \quad \text{para } k = N/2, N/2 + 1, \dots, N - 1.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Se apenas se permitir que  $k$  varie entre 0 e  $N/2$ , então, alternativamente:

$$\begin{aligned}\{\tilde{x}(k)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \{\tilde{z}(k)\} \right) \\ &\quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \{\tilde{x}(k + N/2)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} + e^{-i\frac{2\pi(k+N/2)}{N}} \{\tilde{z}(k)\} \right).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Utilizando a identidade de Euler,  $e^{-i\pi} + 1 = 0$ , a expressão 3.13 simplifica para:

$$\begin{aligned}\{\tilde{x}(k)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} + e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \{\tilde{z}(k)\} \right) \\ &\quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \{\tilde{x}(k + N/2)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} - e^{-i\frac{2\pi k}{N}} \{\tilde{z}(k)\} \right).\end{aligned}\tag{3.14}$$

Definindo uma variável complexa  $W$  como:

$$W = e^{-i2\pi/N},\tag{3.15}$$

obtém-se então:

$$\begin{aligned}\{\tilde{x}(k)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} + W^k \{\tilde{z}(k)\} \right) \\ &\quad k = 0, 1, 2, \dots, N/2 - 1 \\ \{\tilde{x}(k + N/2)\} &= \frac{1}{2} \left( \{\tilde{y}(k)\} - W^k \{\tilde{z}(k)\} \right)\end{aligned}\tag{3.16}$$

A equação 3.16 é a base do método da FFT. Aplicando a FFT a todos os sinais de resposta, obtém-se então a resposta no domínio da frequência. Para se obter as DE, é necessário efectuar o cálculo indicado em 3.17 para todos os GDL medidos. Tendo então

dois sinais genéricos  $\{x(r)\}$  e  $\{y(r)\}$  em que a transformada de Fourier dos mesmos é dada por  $\{X(k)\}$  e  $\{Y(k)\}$ , respectivamente, as DE são calculadas a partir de:

$$\begin{aligned} S_{XX}(k) &= X^*(k)X(k) & S_{XY}(k) &= X^*(k)Y(k) \\ S_{YX}(k) &= Y^*(k)X(k) & S_{YY}(k) &= Y^*(k)Y(k), \end{aligned} \tag{3.17}$$

em que  $\bullet^*$  é o complexo conjugado do elemento. Efectuando o cálculo indicado nas expressões 3.17 para todas as respostas transformadas e para todos os valores de  $k$ , obtém-se assim as DE do sistema em estudo.

#### 3.1.3 Identificação no Domínio do Tempo

O método de AMO tem como um dos seus principais objectivos a identificação das propriedades modais de um determinado sistema. Como já foi referido, essa análise pode ser efectuada no domínio do tempo ou no da frequência. A presente secção aborda alguns aspectos e diferentes técnicas de identificação dos parâmetros modais no domínio do tempo.

Quando se pretende analisar o comportamento vibratório de uma estrutura no domínio do tempo, considera-se a resposta como uma resposta livre do sistema [Brincker and Ventura, 2015]. Isto significa que, em qualquer altura, todos os modos de vibração se encontram presentes no sinal de resposta. Esta é uma das principais dificuldades em análises no domínio do tempo. Contudo, este tipo de análise oferece uma maior facilidade em obter dados desprovidos de tendência devido à manipulação de dados do que os métodos no domínio da frequência.

O objectivo dos métodos no domínio de tempo é o de retirar a informação pretendida (propriedades modais) a partir das FC. Normalmente, para retirar esta informação, utiliza-se algum tipo de técnica baseada num modelo paramétrico de regressão. As diferentes metodologias variam entre si consoante a formulação do tipo de regressão a utilizar.

Ao longo dos anos foram desenvolvidos vários métodos e algoritmos no domínio do tempo para AMO. O primeiro foi desenvolvido por Ibrahim and Mikulcik [1977] chamada *Ibrahim Time Domain* (ITD) seguida da *Polyreference* [Vold et al., 1982] e da *eigen realization algorithm* (ERA) [Juang and Pappa, 1985]. Mais recentemente, surgiram dois métodos muito robustos: o *stochastic subspace identification* (SSI) [Van Overschee and De Moor, 1996] e o *frequency-domain decomposition* (FDD) [Brincker et al., 2000].

#### 3.1.4 Identificação no Domínio da Frequência

Contrariamente à identificação no domínio do tempo, em que todos os modos de vibração se encontram presentes independentemente do intervalo de tempo selecionado, os dados no domínio da frequência são expressos em pequenas janelas de frequência, ou seja, o modo de vibração predominante nessa frequência destaca-se dos restantes. Assim, no domínio da

frequência, ocorre uma decomposição modal de forma natural. Esta é a maior vantagem dos métodos de identificação neste domínio. A principal desvantagem prende-se com o facto de, devido à manipulação matemática que ocorre na mudança de domínio, os dados não se apresentam completamente livres de tendência.

Um dos primeiros métodos a ser utilizado em AMO para se obter as propriedades modais de um sistema denomina-se como Abordagem Clássica no Domínio da Frequência (ACDF - *Classical Frequency-Domain Approach*, CFDA), também conhecido como Domínio da Frequência Básico (*Basic Frequency Domain*, BFD), ou “*Peak-Picking*”. Este método baseia-se no facto de, quando sujeita a excitações ambientais, a estrutura apresenta uma maior amplitude de resposta na vizinhança das frequências naturais [Brincker and Ventura, 2015]. Logo, estas frequências podem ser identificadas pelos picos no espetro de resposta dos pontos medidos.

A ACDF será o processo descrito no presente documento. Para outros métodos no domínio da frequência, aconselha-se a leitura de Brincker and Ventura [2015], Rainieri and Fabbrocino [2014] e Au [2017].

### Método de Abordagem Clássica no Domínio da Frequência

A ideia base por detrás do método de ACDF é que, tendo uma estrutura com pouco amortecimento e modos de vibração bem espaçados, a contribuição da resposta numa pequena gama de frequências perto da ressonância é quase exclusivamente devido ao modo de vibração em análise. Então, analisando os gráficos da DE, é possível determinar quais as frequências de ressonância presentes na gama de frequências escolhida. O inconveniente neste processo é o número de funções de DE a estudar. Visto que a matriz de DE tem dimensões  $n \times n$  (sendo  $n$  o número pontos medidos), seria necessário inspeccionar  $n^2$  gráficos de DE, ou seja, todos os elementos da matriz de DE teriam de ser inspeccionados. Para contornar este inconveniente, Felber [1994] utilizou uma função que denominou Média Normalizada da Densidade Espectral (*Averaged Normalized Power Spectral Density*, ANPSD), que é dada pela equação:

$$ANPSD(f_k) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l NPSD_i(f_k), \quad (3.18)$$

em que  $NPSD_i(f_k)$  é a DE normalizada (*Normalized Power Spectral Density*) e é definido como:

$$NPSD_i(f_k) = \frac{PSD_i(f_k)}{\sum_{k=0}^N PSD_i(f_k)}. \quad (3.19)$$

Sendo  $PSD_i(f_k)$  a DE  $i$  pertencente ao grupo  $l$ ,  $f_k$  a frequência discreta número  $k$  e  $N$  o número de frequências discretas. Desta forma, Felber reduziu o número de gráficos a analisar para apenas um. Assim sendo, analisando o gráfico ANPSD e determinando os

valores das frequências em que ocorrem os picos de amplitude, determina-se as frequências naturais de vibração.

Considerando a resposta de um sistema  $\{y(t)\}$  numa banda de frequências dominada por um só modo de vibração, a resposta é dada por:

$$\{y(t)\} = \{a\}q(t), \quad (3.20)$$

onde  $\{a\}$  é o vector modal e  $q(t)$  a coordenada modal do modo de vibração. Utilizando a definição de FC [Brincker and Ventura, 2015], a matriz das FC é dada por:

$$[\hat{R}(\tau)] = E[y(t)y(t+\tau)] = aE[q(t)q(t+\tau)]a^T = \hat{R}_q(\tau)aa^T, \quad (3.21)$$

sendo  $\hat{R}_q(\tau)$  a função de auto-correlação da coordenada modal  $q(t)$ ,  $a^T$  o vector modal transposto e  $E[\bullet]$  a variância de  $\bullet$ . A densidade espectral do sinal  $\{y(t)\}$  é então dada por:

$$[S_y(f)] = S_q(f)aa^T, \quad (3.22)$$

em que  $S_q(f)$  é a função DE da coordenada modal. Isto significa que, neste caso (modos de vibração bem espaçados), qualquer coluna da matriz de DE  $[S(f)] = [u_1, u_2, \dots]$  à frequência de ressonância, representa uma estimativa do vector modal.

Assim sendo, analisando a matriz de DE a cada frequência natural de vibração, obtém-se um estimativa do vector modal desse modo de vibração.

Este método, apesar de simples e expedito, peca pela necessidade da resposta na ressonância ser produzida apenas por um modo de vibração. Logo, a precisão do método depende de frequências naturais bem espaçadas e de razões de amortecimento reduzidas.

Resumindo, o método ACDF é um método eficiente e expedito que pode ser dividido em três passos:

1. Tratamento dos os dados recolhidos de forma a realizar uma média normalizada do espectro de resposta (ANPSD);
2. Identificação das frequências naturais de vibração através dos picos no gráfico ANPSD;
3. Identificação dos vectores modais do sistema através das matrizes de DE às frequências naturais de vibração recolhidas.

## 3.2 Caracterização do Algoritmo

A presente secção aborda a metodologia utilizada ao longo do trabalho realizado, assim como a implementação do algoritmo em *MATLAB*<sup>®</sup>. Inicialmente, será descrito o processo utilizado no desenvolvimento do algoritmo de AMO, posteriormente, é apresentada a sua implementação.

O método seleccionado para o desenvolvimento do algoritmo de AMO foi o da Abordagem Clássica no Domínio da Frequência (ACDF). Esta escolha deve-se à simplicidade do método em questão, bem como a sua relativa facilidade de implementação. Apesar das desvantagens do método na análise de sistemas com amortecimento elevado e modos de vibração próximos, essas desvantagens podem ser contornadas adaptando os casos de estudo aos requisitos do método. Adicionalmente, é importante perceber quais as limitações do método utilizado. Para tal, foi inserida a possibilidade de adicionar amortecimento aos casos de estudo para analisar as repercussões nos resultados obtidos.

### 3.2.1 Descrição do Método

Para se efectuar uma análise através do método “*Peak-Picking*” é primeiro necessário obter as matrizes de DE da resposta. Com esse intuito, foi elaborada uma metodologia que é uma adaptação do processo descrito em Newland [2005] para obter as DE, que se divide nos seguintes passos:

1. Estimar a frequência máxima de interesse para ser analisada. Se necessário, filtrar o sinal para remover os componentes com frequência excessivamente altas;
2. Determinar um passo de medição apropriado ( $\Delta t$ ), para que a frequência de Nyquist seja superior à frequência máxima presente no sinal, e que seja, no mínimo, o dobro da frequência máxima de interesse;
3. Determinar a precisão necessária ( $\sigma/m$  - variância do sinal sobre o valor médio);
4. Estimar a resolução necessária, de forma a definir o valor máximo de banda efectiva ( $B_e$ );
5. Calcular o tempo de medição mínimo necessário ( $T$ ) através da equação:

$$\frac{\sigma}{m} \simeq \frac{1}{\sqrt{B_e T}}; \quad (3.23)$$

6. Definir o número de medições ( $N = T/\Delta t$ ) necessário em cada recolha de dados;
7. Determinar o número de zeros adicionais ( $L$ ) de forma a que o número total de medições ( $L + N$ ) seja igual à potência mais próxima de 2;
8. Determinar o número de espectros adjacentes ( $2n + 1$ ) para se realizar a média entre os espectros de acordo com a equação:

$$(2n + 1) \left( \frac{N}{N + L} \right) = B_e T; \quad (3.24)$$

9. Efectuar o tratamento de sinal necessário e respectivo cálculo das DE da seguinte forma:

- (i) Efectuar (caso necessário) a discretização dos sinais  $u_r$  e  $v_r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, (L + N - 1)$  com um passo  $\Delta t = T/N$ ;
- (ii) Calcular a média dos sinais  $u$  e  $v$  de acordo com:

$$\hat{u} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} u_r \quad \text{e} \quad \hat{v} = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} v_r; \quad (3.25)$$

- (iii) Gerar as novas sequências do sinal  $x_r$  e  $y_r$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, (L + N - 1)$  em que:

$$\begin{aligned} x_r &= u_r - \hat{u} & \text{para } r = 0, 1, 2, \dots, (N - 1) \\ x_r &= 0 & \text{para } r = N, (N + 1), \dots, (N + L - 1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned} y_r &= v_r - \hat{v} & \text{para } r = 0, 1, 2, \dots, (N - 1) \\ y_r &= 0 & \text{para } r = N, (N + 1), \dots, (N + L - 1) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sendo que  $x_r$  e  $y_r$  são ambos de média nula e com os  $L$  zeros adicionais;

- (iv) Determinar a transformada de Fourier dos sinais através da FFT em que:

$$X_k = FFT(x_r) \quad \text{e} \quad Y_k = FFT(y_r); \quad (3.28)$$

- (v) Calcular as DE através dos produtos apropriados:

$$\begin{aligned} S_{XX_k} &= X_k^* X_k & S_{XY_k} &= X_k^* Y_k \\ S_{YX_k} &= Y_k^* X_k & S_{YY_k} &= Y_k^* Y_k \end{aligned} \quad (3.29)$$

com  $k = 0, 1, 2, \dots, N + L - 1$ ;

10. Calcular as estimativas do espectro contínuo através da equação:

$$\tilde{S}(\omega_k) \simeq \frac{T_L}{2\pi} S_k \quad (3.30)$$

em que  $\omega_k = 2\pi k/T_L$  rad/s e  $T_L = (N + L)\Delta t$ . O valor de  $k$  é de seguida ajustado para correr de:

$$-\frac{N + L}{2} \quad \text{até} \quad \frac{N + L}{2}$$

onde  $S_{-k} = S_k^*$ . A razão para esta alteração deve-se à necessidade de restringir a gama de valores de  $\omega$  para  $-\pi/\Delta t < \omega < \pi/\Delta t$ , visto que  $\pi/\Delta t$  é a frequência de Nyquist e  $\omega_k = \pi/\Delta t$  quando  $k = (N + L)/2$ . Esta alteração não provoca nenhuma perda de informação porque os valores de  $S_k$  para  $(N + L)/2 < k \leq (N + L)$  são repetições dos valores na gama  $0 \leq k < (N + L)/2$  [Newland, 2005];

11. Alterar as estimativas das DE com um factor de correcção devido aos zeros adicionados segundo:

$$\tilde{S}'(\omega_k) \simeq \left( \frac{N + L}{N} \right) \tilde{S}(\omega_k) \quad (3.31)$$

onde  $k = -(N + L)/2, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N + L)/2$



12. Efectuar o amaciamento final através da média dos espectros adjacentes segundo:

$$\hat{S}(\omega_k) = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \tilde{S}'(\omega_{k+m}) \quad (3.32)$$

para  $k = 0, 1, \dots, (N+L)/2 - (2n+1)$ . Desta forma, as DE resultam numa representação gráfica amaciada na gama de frequências de interesse.

O processo descrito refere apenas dois sinais de resposta, mas o procedimento é análogo qualquer que seja o número de respostas (ou GDL) considerados.

Tendo as matrizes de DE calculadas, segue-se o procedimento de determinar as propriedades modais do sistema a partir das mesmas. A primeira propriedade a calcular são as frequências naturais de vibração. O procedimento habitual para se obter as frequências naturais passa pela análise dos gráficos das DE em função da frequência. Como já foi referido, [Felber \[1994\]](#) simplificou este processo com o desenvolvimento da ANPSD. Depois de calcular a ANPSD, é então possível analisar o gráfico em função da frequência para se determinar os máximos da função e as frequências às quais os mesmos ocorrem, obtendo-se assim as frequências naturais de vibração de uma forma expedita.

Após a obtenção das frequências naturais de vibração, a próxima propriedade modal a calcular são os vectores modais. Para se obter os vectores modais, é necessário recorrer às matrizes de DE às frequências naturais de vibração. Utilizando os valores de frequência obtidos, são retiradas as matrizes de DE às respectivas frequências naturais. Sendo que cada coluna da matriz de DE a determinada frequência natural é proporcional ao vector modal do respectivo modo de vibração, é, desta forma, possível obter uma estimativa dos vectores modais.

Analisando cada matriz de DE à respectiva frequência natural, retira-se, assim, o vector modal para o respectivo modo de vibração. Efectuando o mesmo processo para as restantes matrizes de DE, obtém-se os vectores modais de todo o sistema.

A única propriedade modal em falta é, caso se aplique, a razão de amortecimento. Tendo em conta que o método descrito é mais preciso quanto menor for o amortecimento, e que, como já foi provado várias vezes([\[Okauchi et al., 1992\]](#), [\[Peeters, 2000\]](#) e [\[Rainieri et al., 2010\]](#)) que o processo de obtenção das razões de amortecimento é muito pouco fiável, o algoritmo utilizado no presente trabalho não calcula as razões de amortecimento.

#### 3.2.2 Implementação em *MATLAB*

Estando delineada a metodologia a utilizar, é necessário a sua formulação num programa computacional capaz de o executar. Neste caso, a escolha recaiu no *software* computacional *MATLAB*<sup>®</sup> desenvolvido pela *MathWorks*<sup>®</sup>.

Para o efeito, criou-se uma *script* denominada de AMO (Análise Modal Operacional) dividida nas seguintes secções:

- Variáveis de Medição
- Pré-processamento
- Densidades Espectrais
- Frequências Naturais
- Vectores Modais
- Resultados

As secções de Variáveis de Medição e de Resultados requerem adaptação consoante o caso em estudo e o tipo de resultados pretendido, enquanto as restantes estão adaptadas a qualquer tipo de análise seleccionada.

De seguida, são apresentadas descrições das diferentes secções incluídas no programa desenvolvido.

##### Variáveis de Medição

A primeira secção presente na *script* é a de Variáveis de Medição. Nesta secção é necessário definir os valores das variáveis de medição a utilizar ao longo da análise, sendo estas:

Tipo de Resposta	Selecionar um valor de 1 a 5. Consoante o valor escolhido, é selecionado um caso de estudo diferente que serão descritos posteriormente. Adicionalmente, também se pode selecionar a presença de amortecimento ou não no caso selecionado, sendo 0 sem amortecimento e 1 com; (nota: apenas os casos exemplos 1 e 2 se pode adicionar amortecimento ao sistema.)
Graus de Liberdade	Definir qual o número de GDL em análise;
Frequência Máxima	Definir qual o valor máximo de frequência em análise (em Hertz);
Precisão	Definir qual a precisão pretendida ( $\sigma/m$ );
Largura de Banda	Definir qual a largura de banda efectiva pretendida ( $B_e$ em Hertz);

Resolução da Resposta	Definir o passo de medição $\Delta t$ em relação à frequência de Nyquist (no mínimo, deve ser o dobro do inverso da frequência de Nyquist). Neste parâmetro ( $ny$ ) apenas se estabelece a ordem de grandeza que se pretende a resolução (por exemplo, definindo este parâmetro como 2, o passo de medição será duas vezes menor que o inverso da frequência de Nyquist).
-----------------------	--

Estando determinadas as variáveis de medição suscetíveis a adaptação caso a caso, são, de seguida, calculadas automaticamente as restantes variáveis de medição, que são:

Passo da Resposta	Cálculo do passo de medição da resposta ( $\Delta t$ ) em função da frequência máxima e do factor $ny$ ;
Tempo de Medição	Cálculo do tempo total de medição ( $T$ ) necessário para se obter a precisão e resolução pretendida;
Número de Medições	Número total de medições a efectuar ( $N$ ) consoante o tempo total de medição e o passo da resposta;
Zeros Adicionais	Número de zeros adicionais ( $L$ ) para tornar o número total de medições uma potência de 2, ou seja, encontrar o inteiro mais próximo por excesso que torne $N$ numa potência de 2 e adicionar $L$ zeros ao $N$ original;
Espectros Adjacentes	Cálculo do número de espectros adjacentes para se efectuar o amaciamento final através da média dos espectros;
Séria Discreta	Discretização da variável tempo $t$ consoante o passo $\Delta t$ e o tempo total de medição $T$ .

Após o cálculo das grandezas descritas, estão reunidas as condições para se iniciar o pré-processamento do sinal da resposta.

### Pré-processamento

Estando definidas as variáveis de medição, segue-se o pré-processamento. Nesta secção não é necessário qualquer alteração das variáveis presentes visto que são todas calculadas automaticamente.

Em primeiro lugar, o programa confere qual o tipo de resposta seleccionada (de 1 a 5) e executa a função correspondente ao exercício exemplo escolhido. Caso o número seleccionado não seja nenhum dos cinco exemplos, ocorre uma mensagem de erro e o programa não efectua mais nenhum cálculo.

Depois de obtido o sinal de resposta através da função escolhida, inicia-se o tratamento desse mesmo sinal. O tratamento do sinal é dividido em três passos:

1. Cálculo da média de cada sinal de resposta;
2. Cálculo dos novos sinais subtraindo o valor da média e adicionando os zeros necessários;
3. Cálculo da transformada de Fourier dos sinais através do método FFT.

Depois de realizado o pré-processamento, inicia-se o cálculo das matrizes de DE.

#### Densidades Espectrais

O cálculo das matrizes de DE inicia-se pela obtenção das mesmas desprovidas de qualquer processamento. Para as obter, é efectuado o cálculo um a um, de cada conjugado complexo do sinal transformado multiplicado pelo sinal transformado, sendo os sinais selecionados dependentes do elemento da matriz que se esteja a calcular. Ou seja, o programa percorre todas as linhas e todas as colunas da matriz DE (de dimensões  $GDL \times GDL$ ) para todos os valores de  $k$ , sendo  $k$  de igual número à discretização da variável  $t$ . Desta forma, obtém-se a matriz de DE.

Depois de obtidas as matrizes de DE é necessário proceder ao seu processamento. Esse processamento está dividido em quatro etapas:

1. Cálculo do espectro contínuo;
2. Alteração da variável  $k$  para as frequências correrem entre  $-(N + L)/2$  e  $(N + L)/2$ ;
3. Inserção de um factor de correcção devido ao acréscimo de zeros no sinal;
4. Amaciamento final através da média dos espectros adjacentes.

Desta forma, obtém-se as matrizes de DE amaciadas e prontas a ser analisadas na gama de frequências de interesse.

#### Frequências Naturais

Após ao cálculo das matrizes de DE, inicia-se a identificação dos parâmetros modais. Sendo que primeiro parâmetro modal a ser identificado é o das frequências naturais, é necessário primeiro determinar a ANPSD para se poder identificar os picos da função e as frequências às quais os mesmos ocorrem. Para calcular a ANPSD é imprescindível o cálculo das DE normalizadas (NPSD). Essa normalização é efectuada dividindo cada elemento da matriz de DE de frequência  $\omega_k$  pela soma de todos os  $\omega_k$  desse mesmo elemento. Realizando esse cálculo para todos os elementos das matrizes de DE obtém-se, então, a NPSD.

Com o intuito de tornar o processo mais rápido e evitar o uso desnecessário de processamento computacional, realizou-se o cálculo de uma matriz denominada SPSPD (Soma *Power Spectral Density*) que é a uma matriz de dimensões  $GDL \times GDL$ , em que é calculada a soma de todos os elementos  $\omega_k$  para cada elemento da matriz DE.

De seguida, para evitar que a matriz contenha algum valor nulo (visto que esta vai ser utilizada como denominador numa divisão), a matriz é verificada número a número e, quando um valor é igual a zero, este é alterado para 1. Como esse valor vai ser usado como divisor de um número nulo, a alteração de zero para 1 é apenas para não apresentar um resultado não definido na matriz de NPSD.

Posteriormente ao cálculo da NPSD é realizada uma média dos valores absolutos de NPSD para se obter a ANPSD. A média realizada é feita em valores absolutos para esta ser passível de ser representada graficamente.

Tendo a ANPSD, basta retirar os picos da função e determinar a que frequências estes ocorrem. Contudo, visto que os gráficos de DE estão sujeitos a pequenas flutuações de valores mesmo depois de realizados os amaciamentos, surge um número de picos muito superior ao esperado. Para contornar este problema, os picos são balizados tendo em conta duas restrições: valor mínimo e espaçamento mínimo. O valor mínimo é definido como um valor de ordem de grandeza cinco vezes inferior ao pico máximo presente na função. Enquanto o espaçamento mínimo é definido como 200 vezes o passo da frequência. Estes valores foram obtidos após alguns testes e análises a diferentes respostas de diferentes tipos sistemas.

Então, desta forma, obtém-se a primeira propriedade modal do sistema, as frequências naturais.

## Vectores Modais

Estando determinadas as frequências naturais de vibração, a próxima propriedade modal a determinar são os vectores modais. Para o cálculo dos vectores modais é necessário primeiro obter as matrizes de DE às frequências naturais de vibração. Então, é criada uma nova variável  $U$ , que contém os valores absolutos das matrizes de DE às respectivas frequências; e uma variável  $ang$  que contém o ângulo de fase de cada elemento de  $U$ .

De seguida, cada matriz  $U$  é analisada a cada frequência natural para se obter o respectivo vector modal. Primeiro, é selecionado um valor da matriz  $U$  que tenha um valor mínimo (para garantir que não é nulo ou apenas ruído), para ser o valor de normalização (igual à unidade) do respectivo vector modal. Estando selecionado esse valor mínimo, os restantes valores da coluna são divididos por esse valor com o intuito de normalizar o vector. À medida que os elementos vão sendo divididos por esse valor selecionado, é verificado o ângulo de fase desse mesmo elemento para garantir que este fica com o sinal correcto no vector modal. Comparando o ângulo de fase do elemento com o elemento de normalização, caso a diferença em valor absoluto ângulo seja próxima de  $180^\circ$ , o elemento é multiplicado por  $-1$  para alterar o seu sinal.

Após a definição dos vectores modais, é realizado um tratamento aos valores obtidos. Se um elemento tiver valor absoluto inferior a 0.01, esse valor é alterado para zero. Este procedimento serve para eliminar valores residuais dos vectores modais e facilitar a leitura dos resultados.

## Resultados

A ultima secção do programa é a que trata dos resultados, mais precisamente, quais resultados e em que formato é que se pretende obter os mesmos.

Em primeiro lugar, selecciona-se quais os resultados que se pretende exibir na *command window* do programa. Os resultados entre os quais se pode seleccionar são:

- Frequências Naturais Identificadas Experimentalmente;
- Vectores Modais Identificados Experimentalmente.

Como durante o desenvolvimento do presente trabalho foram utilizados exemplos de referência para validação do algoritmo ACDF, também se pode obter como *output* de resultados para estes casos:

- Frequências Naturais Calculadas Teoricamente;
- Vectores Modais Calculados Teoricamente.

Sendo que as variáveis identificadas experimentalmente são as determinadas pelo algoritmo desenvolvido, enquanto as variáveis teóricas são calculadas nas funções dos respectivos casos de estudo.

Para seleccionar se uma variável é exibida na *command window*, basta atribuir o valor 1 a essa mesma variável. Caso contrário, atribui-se por defeito o valor 0. A imagem seguinte demonstra a título exemplificativo o conceito explicado.

```
202 %% Resultados
203 %Selecionar quais os resultados que aparecem na command window:
204 %Frequências naturais calculadas experimentalmente
205 -     fex=1; %0- nao /1 - sim
206 %Vectores modais calculados experimentalmente
207 -     vex=0; %0- nao /1 - sim
208 %Frequências naturais calculadas teoricamente
209 -     ft=1; %0- nao /1 - sim
210 %Vectores modais calculados teoricamente
211 -     vt=0; %0- nao /1 - sim
212
```

Figura 3.1: Exemplo de selecção de variáveis a exibir na *command window*.

No caso indicado na figura 3.1, são exibidos os resultados das frequências naturais calculadas experimentalmente e teoricamente, enquanto que os vectores modais não são apresentados.

Após a selecção dos elementos que são exibidos na *command window*, segue-se a selecção da representação gráfica. O conceito para escolher quais são os gráficos que serão apresentados é similar ao explicado anteriormente, mas com uma alteração. Em alguns casos, para além de se determinar se a representação gráfica de determinada variável é exibida ou não, também é necessário escolher quais os elementos dessa variável que são apresentados. As variáveis sujeitas a selecção de representação gráfica são:

- ANPSD;
- Formas Naturais Identificadas Experimentalmente;
- Formas Naturais Identificadas Teoricamente;
- Resposta do sistema no domínio do tempo.

Para clarificar o processo de selecção das variáveis para representação gráfica, a figura 3.2 foi seleccionada a título exemplificativo.

```

213 %Selecionar representação gráfica
214 %Grafico ANPSD
215 - ganpsd=0; %0- nao /1 - sim
216 %Formas naturais calculadas experimentalmente
217 - fne=1; %0- nao /1 - sim
218 %se sim, de qual/quais modos
219 - fneg=[1 2]; %indicar o numero dos modos com um espaço entre si
220 %Formas naturais calculadas teoricamente
221 - fnt=0; %0- nao /1 - sim
222 %se sim, de qual/quais modos
223 - fntg=[1 2 3]; %indicar o numero dos modos com um espaço entre si
224 %Resposta do sistema
225 - rs=1; %0- nao /1 - sim
226 %se sim, de qual/quais GDL
227 - rsg=[2 3]; %indicar o numero dos GDL com um espaço entre si

```

Figura 3.2: Exemplo de selecção de variáveis para representação gráfica.

No exemplo em questão, as variáveis que serão representadas graficamente são as formas naturais identificadas experimentalmente e a resposta do sistema no domínio do tempo. Quanto às formas naturais, serão exibidas as formas naturais do primeiro e do segundo modo de vibração. Já a resposta do sistema, será representada a resposta do segundo e do terceiro GDL. Neste caso, as formas naturais calculadas teoricamente não serão representadas, mas caso estivessem seleccionados para o serem, seriam representadas as formas naturais dos três primeiros modos de vibração. A selecção dos elementos da variável que serão representados tem de ser feita com um espaço entre si e não necessitam de estar em ordem, ou seja, seleccionar [1 2 3] é equivalente a seleccionar [3 1 2].

Estando seleccionados os resultados sujeitos a serem exibidos, segue-se o processamento das respectivas variáveis e consequente representação. Após este processamento, é efectuado um cálculo do erro relativo entre as variáveis identificadas experimentalmente e os valores teóricos. Quanto às frequências naturais, é calculado o erro relativo de cada valor da frequência obtido e a média desses valores. Para os vectores modais, é calculado o erro relativo de cada elemento, é calculada a média dos erros de cada vector modal, e a média do erro relativo de todos os vectores modais. Desta forma, é possível obter uma noção do erro envolvido em cada elemento e nas variáveis como um todo.

Por último, as variáveis dos resultados são aglomeradas numa variável do tipo *structure* (estrutura) denominada *resultados* que contém os seguintes elementos:

- Teóricos;
  - wt* - frequências naturais teóricas;
  - ut* - vectores modais teóricos;
- Experimentais;
  - wi* - frequências naturais experimentais;
  - u* - vectores modais experimentais;
- Erro;
  - freq* - erro realtivo entre frequências;
  - somafreq* - média dos erros relativos das frequências;
  - vect* - erro relativo entre os elementos dos vectores modais;
  - somavect* - média dos erros entre cada vector modal;
  - totalsomavect* - média dos erros dos vectores modais.

Para finalizar o programa, são eliminadas todas as variáveis excepto a variável *resultados*. Caso se pretenda uma análise das restantes variáveis envolvidas no processo de cálculo, pode-se adicionar as mesmas à linha de código que elimina os restantes resultados, ou até mesmo apagar ou comentar a linha que elimina os resultados. Escolhendo a segunda opção, todas as variáveis envolvidas ficam no *workspace*(ambiente de trabalho) do *MATLAB*.

#### 3.2.3 Fluxograma do Algoritmo

Para simplificar e facilitar a compreensão dos passos envolvidos no algoritmo, desenvolveu-se o fluxograma representado na figura 3.3. Para o fluxograma não ficar com excesso de informação, alguns dos passos apenas indicam o processo a que estão sujeitos e não todos os cálculos envolvidos. Para uma informação mais detalhada do algoritmo desenvolvido, o anexo A apresenta o código implementado.



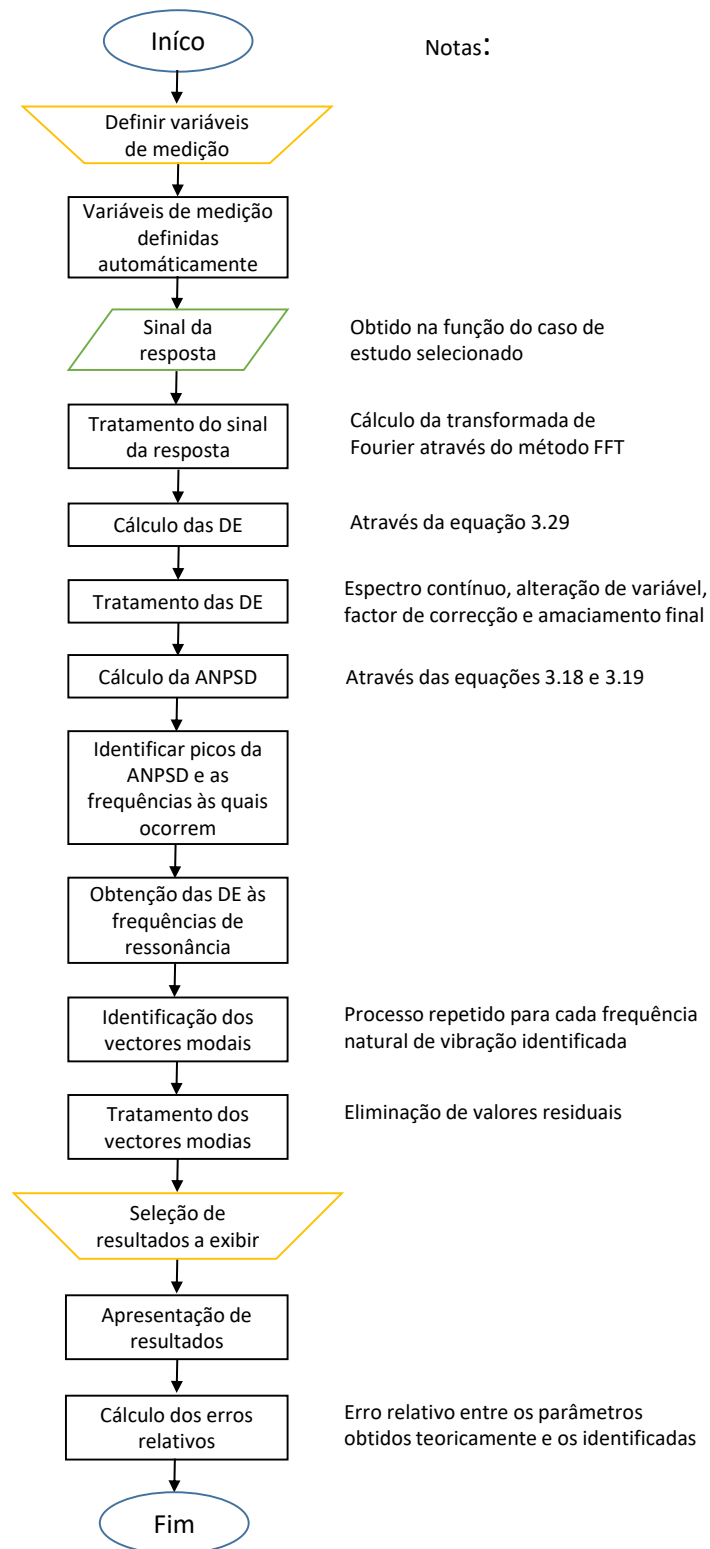


Figura 3.3: Fluxograma do Algoritmo



### Casos de Estudo

---

Com o intuito de validar o algoritmo e testar as suas limitações, elaborou-se cinco tipos de caso de estudo diferentes para o propósito. Os casos exemplo selecionados são de complexidade crescente, tendo dois deles a escolha de se adicionar amortecimento ao sistema. O tipo de casos passíveis de ser selecionados são:

2 GDL	Caso de estudo com dois GDL e possibilidade de escolha de presença de amortecimento ou não;
5 GDL	Caso de estudo com cinco GDL e possibilidade de escolha de presença de amortecimento ou não;
Viga Fixa-Livre	Viga com condições fronteira fixa numa extremidade e livre na outra. Número de GDL à escolha do utilizador;
Viga Simplesmente Apoiada	Viga com condições fronteira de apoio simples em ambas as extremidades. Número de GDL à escolha do utilizador;
Veio com Extremidades Livres	Veio com condições fronteira livre em ambas as extremidades. Número de GDL à escolha do utilizador.

Cada caso de estudo é uma *function* do *MATLAB* que é invocada consoante o tipo de resposta selecionado. Todas as funções estão dependentes de variáveis de entrada e de saída, e todas são passíveis de alteração das propriedades do sistema e de excitação. As forças aplicadas aos sistemas são excitações transientes de banda larga, com o intuito de excitar o maior número possível de modos de vibração. De seguida, é apresentada uma descrição de cada caso exemplo.

## 4.1 Sistema com 2 Graus de Liberdade

Iniciando com o caso de estudo mais simples, a função para este exemplo denomina-se *ex2GDL*. Na figura 4.1 encontra-se uma representação genérica do modelo do sistema em análise.

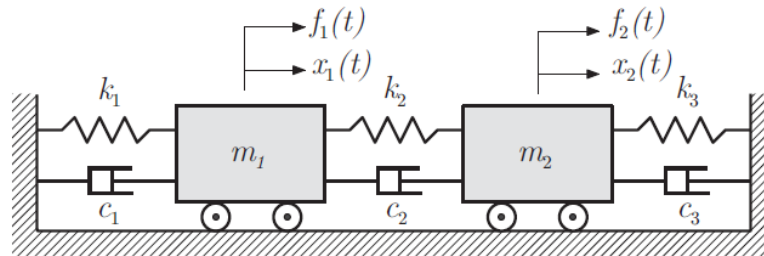


Figura 4.1: Modelo genérico do sistema com 2GDL [Dias Rodrigues, 2014].

Como já foi referido, as funções do programa requerem que sejam definidas as variáveis de entrada, sendo neste caso:

<i>GDL</i>	Número de GDL do sistema;
<i>t</i>	Variável discreta do tempo;
<i>amortecimento</i>	Se contém amortecimento ou não.

Após concluir o processamento da função, as variáveis de saída são:

<i>x</i>	Resposta em função do tempo;
<i>wt</i>	Frequências Naturais calculadas teoricamente;
<i>ut</i>	Vectoros modais calculados teoricamente.

Quanto ao conteúdo da função em si, que permite obter as variáveis de saída já definidas, divide-se em quatro secções:

- Verificação do número de GDL;
- Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração);
- Propriedades do sistema (calculadas automaticamente);
- Resposta

A primeira secção, tal como o nome indica, verifica se o número de GDL, que é estabelecido no programa principal, é o mesmo que o usado na função. Caso não seja, surge uma mensagem de erro que impede a continuação do algoritmo.

As propriedades do sistema que são susceptíveis a serem alteradas, surgem nesta segunda secção. Neste caso, pode-se alterar o valor da excitação ( $f$ ), bem como os GDL em que está aplicada; os valores da matriz de massa ( $m$ ); os valores da matriz de rigidez ( $k$ ) e, caso se aplique, a razão de amortecimento por modo de vibração.

Estando definidas as propriedades espaciais do sistema, segue-se o cálculo das suas propriedades modais. Para o efeito, são calculadas as frequências naturais de vibração e os vectores modais através da resolução do problema generalizado de valores e vectores próprios ( $[k]\{\phi\} = \lambda[m]\{\phi\}$ ). Desta forma, obtém-se o quadrado das frequências naturais ( $ls$ ) e os vectores modais normalizados para massas modais unitárias ( $ve$ ). Para se obter as frequências naturais  $ws$ , basta aplicar a raiz quadrada à variável  $ls$ . Já os vectores modais, são normalizados à unidade do primeiro elemento do vector com um valor mínimo. A razão para esta normalização prende-se com o facto do programa principal não calcular os vectores modais normalizados para massas unitárias. Por último, é calculada a excitação em coordenadas modais.

A última secção da função calcula a resposta que vai ser usada como análise no programa principal. Primeiro, analisa se foi seleccionada a escolha de amortecimento ou não no sistema. Caso não haja amortecimento, a função calcula a resposta em coordenadas modais através do integral de Duhamel, para de seguida calcular a resposta em coordenadas generalizadas. Se foi seleccionado amortecimento, são primeiro calculadas as frequências naturais amortecidas, para posteriormente ser calculada a resposta em coordenadas modais pelo integral de Duhamel para o caso com amortecimento. O último passo, é o calculo da resposta em coordenadas generalizadas. Caso o amortecimento seleccionado não seja 1 ou 0 (com ou sem amortecimento), é exibida uma mensagem de erro que impede a continuação do algoritmo.

Para uma descrição mais detalhada da função, encontra-se no anexo [B](#) o código da função descrita.

## 4.2 Sistema com 5 Graus de Liberdade

O segundo caso de estudo exemplo representa um sistema com cinco GDL. Encontra-se representado na figura 4.2 uma representação genérica do sistema utilizado no presente trabalho. A função, denominada *ex5GDL*, apresenta as mesmas variáveis de entrada e de saída que o exemplo com dois GDL. Praticamente todo o processo de cálculo desta função é idêntico ao exemplo anterior, sendo que a diferença se encontra na possibilidade de escolher o amortecimento por duas vias distintas: razões de amortecimento, como no exemplo anterior; ou a partir da matriz de amortecimento  $c$ .

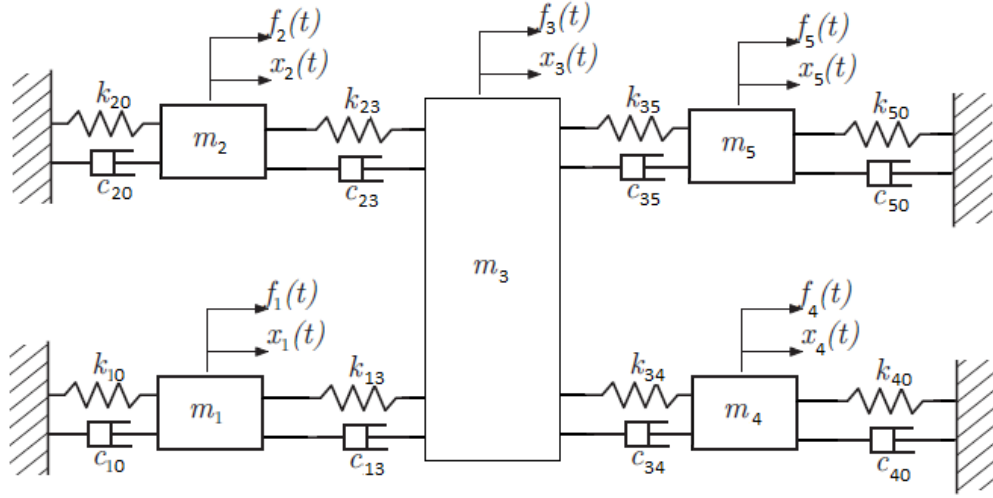


Figura 4.2: Modelo genérico do sistema com 5GDL.

Esta modificação provoca duas diferenças, em relação ao caso anterior, na secção de definição de propriedades do sistema susceptíveis a alteração. Primeiro, existe uma nova variável, *amort*, que estabelece se o amortecimento é definido em função da matriz de amortecimento (1) ou em função das razões de amortecimento (2). A segunda diferença encontra-se na presença de uma nova variável  $c$ , que representa a matriz de amortecimento. Ambas as variáveis de amortecimento,  $c$  e  $k_{si}$ , podem ser alteradas consoante a escolha do utilizador.

O restante programa é em todo idêntico ao anterior, tirando na secção de resultados. Nesta secção, existe uma verificação do valor da variável *amort* que, se for igual a 1, calcula os respectivos valores das razões de amortecimento e as frequências naturais amortecidas; se for igual a 2, calcula directamente o valor das frequências naturais amortecidas; se for qualquer outro valor, surge uma mensagem de erro na escolha da variável que define o amortecimento.

Tendo em conta que este caso de estudo é muito próximo do anterior, a sua inclusão no presente trabalho deve-se principalmente a dois factores. A primeira razão prende-se com o acréscimo do número de GDL. A segunda, com o facto de certos GDL se apresentarem como nodos de vibração em alguns modos naturais de vibração. Tanto uma razão como outra servem para testar as capacidades e os limites do programa desenvolvido.

No anexo C encontra-se o código desenvolvido para a função *ex5GDL*.

### 4.3 Viga com Condições Fronteira Fixa-Livre

O terceiro caso de estudo presente no programa é o de uma viga com as condições fronteira de fixa numa extremidade e livre na outra. Este caso de estudo foi selecionado por ser mais representativo de um sistema real, e por permitir ao utilizador uma maior liberdade na definição das propriedades do sistema. A viga em questão é analisada em regime de vibração transversal pela teoria de Euler-Bernoulli. Na figura 4.3 encontra-se representado o sistema descrito. O número de GDL representados é igual ao utilizado nas simulações do presente trabalho.

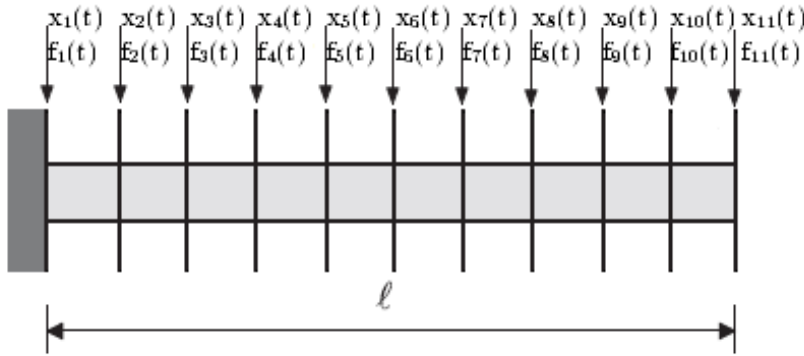


Figura 4.3: Viga com uma extremidade encastrada e a outra livre. Adaptado de [Dias Rodrigues, 2014].

Esta função tem como nome *vigaFL* e apresenta como variáveis de entrada:

$GDL$	Número de GDL do sistema;
$t$	Variável discreta do tempo;
$fmax$	Frequência máxima de interesse (em Hertz).

Já as variáveis de saída são iguais aos dois casos anteriores com uma adição:

$x$	Resposta em função do tempo;
$wt$	Frequências Naturais calculadas teoricamente;
$ut$	Vectores modais calculados teoricamente;
$xv$	Coordenadas da viga discretizada.

Em termos das secções presentes na função, são as mesmas que nos casos anteriores, excluindo a verificação do número de GDL. As restantes secções são adaptadas para o problema em questão.

Começando com a secção de propriedades do sistema susceptíveis a alteração, as variáveis são agora:

$\rho$	Massa volúmica do material da viga em kilograma por metro cúbico;
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal do material da viga em Pascal;
$b$	Largura/espessura do perfil da viga em metros;
$h$	Altura do perfil da viga em metros;
$l$	Comprimento da viga em metros;
$f$	Excitação por GDL em Newton.

A secção seguinte, propriedades do sistema calculadas automaticamente, inicia-se com o cálculo do momento de segunda ordem e da área da secção recta da viga. Antes do cálculo das propriedades modais do sistema, ocorre uma discretização da viga consoante o número de GDL estabelecido. Esta discretização é realizada de forma equidistante, iniciando numa extremidade da viga e terminando na outra, sendo os GDL numerados da esquerda para a direita (figura 4.3). É aconselhável que o número de GDL seja ímpar, para que uma das coordenadas da viga discretizada seja a meio vão da mesma.

Quanto às propriedades modais da viga, inicia-se o cálculo das mesmas com as frequências naturais de vibração. Tendo em consideração qual o valor da frequência máxima de interesse, são calculadas as frequências naturais até esse valor, ou seja, quando se obtém um valor de frequência natural superior ao valor máximo de interesse, o ciclo de cálculo termina e o último elemento calculado é eliminado. É importante ter em consideração que, no presente algoritmo, o número máximo de frequências naturais passíveis de serem calculadas é igual a dez. Normalmente, este valor é mais que suficiente, visto que a partir da décima frequência natural de vibração os valores das mesmas são consideravelmente elevados. Mesmo assim, caso seja necessário obter um número de modos de vibração superior a dez, basta alterar a variável  $n$  da sub-secção "Frequências naturais", para correr desde o valor 1 até ao valor desejado. A variável referida ( $n$ ) não se encontra na secção de variáveis susceptíveis a alteração porque, como já foi referido, considerou-se que os primeiros dez modos de vibração seriam mais do que suficientes para a grande maioria dos casos.

Estando as frequências naturais calculadas, seguem-se os vectores modais. Tomando em consideração o número de frequências naturais obtido, é calculado o mesmo número de vectores modais normalizados para massas unitárias. Tanto o procedimento de cálculo das frequências naturais como o dos vectores modais são retirados de [Dias Rodrigues \[2014\]](#), sendo que o procedimento para os vectores modais apresenta uma particularidade. A equação para o cálculo dos vectores modais apresenta uma constante  $C_n$  dependente das condições iniciais a que o sistema está sujeito. No presente trabalho, a constante é assumida igual a 1. Na realidade, o valor de  $C_n$  não é sempre igual a 1, mas esse factor não é problemático para os casos em questão. A constante  $C_n$  tem de ser exacta quando o intuito é o de obter os vectores modais normalizados para massas unitárias de forma precisa, algo que não é necessário no presente trabalho. O que é necessário, é que a razão entre os elementos dos vectores modais seja precisa, e, visto que todos os elementos do vector modal são multiplicados pela mesma constante  $C_n$ , essa razão entre elementos é mantida. Logo, o



facto de não haver uma precisão muito elevada no cálculo dos vectores modais para massas unitárias não é relevante, visto que os vectores modais, depois de obtidos, são normalizados à unidade do primeiro elemento do vector modal com valor significativo, um processo que já foi descrito anteriormente.

Tendo então as frequências naturais e os vectores modais calculados, a função finaliza com a secção da resposta. Nesta secção, num processo análogo aos exemplos descritos anteriormente, é primeiro calculada a excitação em coordenadas modais para de seguida ser calculada a resposta em coordenadas modais. Para finalizar, é calculada a resposta em coordenadas generalizadas que vai ser utilizada no programa principal. Para uma revisão mais detalhada do método descrito, encontra-se no anexo D o código da função desenvolvida.

## 4.4 Viga com Condições Fronteira Simplesmente Apoiada

O quarto caso exemplo presente no trabalho, é o de um sistema com uma viga simplesmente apoiada nas extremidades (figura 4.4). Tal como no caso anterior, a viga é analisada em regime de vibração transversal considerando a teoria de vigas de Euler-Bernoulli. A função para este caso denomina-se de *vigaAS* e pode ser analisada na sua totalidade no anexo E.

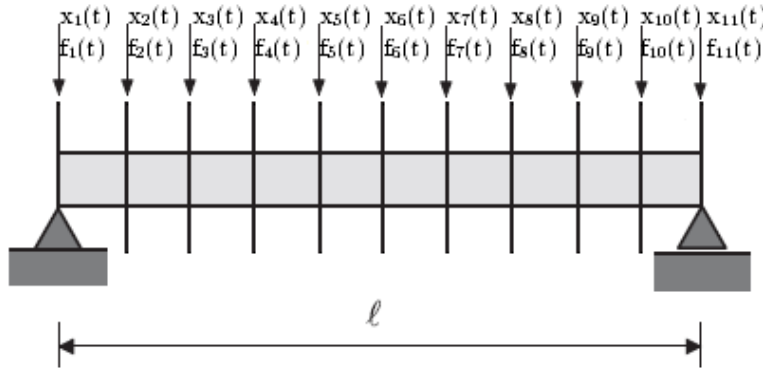


Figura 4.4: Viga simplesmente apoiada. Adaptado de [Dias Rodrigues, 2014].

A função para este sistema é em tudo igual ao caso anterior, incluindo variáveis de entrada e de saída. As únicas diferenças encontram-se nas equações para o cálculo das frequências naturais e vectores modais, que são adaptadas para o caso em questão. Novamente, as equações referidas são retiradas de Dias Rodrigues [2014].

A razão para a inclusão deste caso de estudo no presente trabalho deve-se, principalmente, a dois factores. Primeiro, devido à necessidade de apresentar um caso com condições fronteira diferentes do anterior, segundo, devido ao facto deste exemplo apresentar um nodo de vibração a meio vão da viga nos modos de vibração par, algo que será explorado posteriormente.

## 4.5 Veio com Condições Fronteira Livre-Livre

O último caso de estudo, é o de um veio com as extremidades livres. O veio em questão encontra-se sujeito à aplicação de um momento torsor e é analisada a vibração do sistema em regime de torção. Na figura 4.5 encontra-se representado o sistema descrito. Esta função é denominada de *veioLL* e apresenta as mesmas variáveis de entrada e de saída que os dois últimos casos descritos.

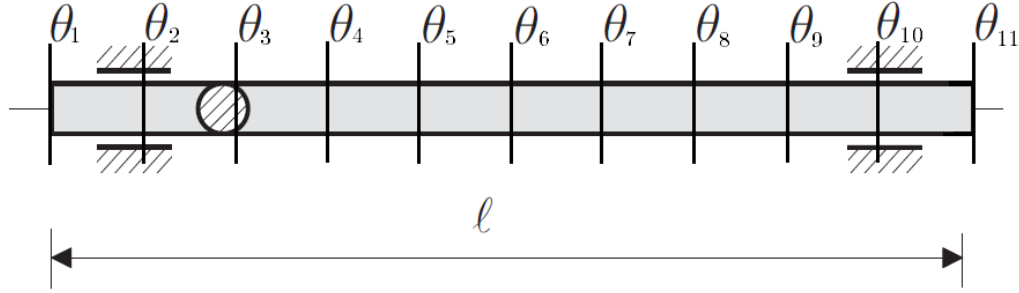


Figura 4.5: Veio com as extremidades livres. Adaptado de [Dias Rodrigues, 2014].

A metodologia envolvida na determinação das propriedades modais do sistema em questão é muito similar aos casos das vigas, mas adaptado para um veio sujeito a torção.

A primeira diferença surge na secção das variáveis susceptíveis a alteração, sendo agora:

$\rho$	Massa volúmica do material do veio em kilograma por metro cúbico;
$G$	Módulo de elasticidade transversal do material do veio em Pascal;
$l$	Comprimento do veio em metros;
$f$	Excitação por GDL em Newton metro.

As restantes secções são idênticas aos casos anteriores, tirando as equações do cálculo das frequências naturais e vectores modais, que são adaptadas para o caso em questão. Novamente, as equações são retiradas de Dias Rodrigues [2014].

Este caso de estudo foi incluído no presente trabalho com o intuito de serem analisados diferentes regimes de vibração. Adicionalmente, a análise de vibração devido à torção levantou dois pontos interessantes. Primeiro, as frequências naturais envolvidas num sistema sujeito a torção são, por norma, consideravelmente mais elevadas quando comparadas às frequências de um sistema em regime de vibração transversal. Segundo, tendo em conta que o método de análise é a AMO, surge uma simplificação na análise experimental quando comparada com a AME. Tendo em conta que em AME a excitação tem de ser medida, o processo para o fazer no caso de uma análise em regime torcional não é o mais directo. Utilizando um *shaker* ou um martelo de impacto, é necessário aplicar essa excitação linear de determinada forma que seja susceptível a ser convertida para um momento a ser aplicado no sistema. Já no processo de análise, essa excitação tem de calculada considerando a

distância ao ponto de aplicação da força, não podendo ser analisada directamente a excitação provocada pelo *shaker* ou martelo. Em AMO, esse processo é desnecessário visto não haver necessidade de se conhecer a excitação, provocando uma simplificação considerável no processo de análise experimental.

A função descrita encontra-se representada na sua totalidade no anexo [F](#).



### Resultados

---

Neste capítulo serão apresentados os resultados e respectiva análise das simulações efectuadas com o algoritmo desenvolvido. Inicialmente, é realizada uma validação do programa, comparando os resultados obtidos nos casos de estudo pela via teórica e experimental. De seguida, é efectuada uma simulação das condições reais de uma actividade experimental para testar a robustez do método desenvolvido.

#### 5.1 Validação do Algoritmo

Iniciando a presente secção do documento com a validação do algoritmo, é efectuada uma comparação dos resultados obtidos nos casos de estudo descritos anteriormente. O primeiro caso a ser analisado é o de dois GDL sem amortecimento, por ser o exemplo mais simples, sendo que a complexidade será aumentada gradualmente.

##### 5.1.1 2 Graus de Liberdade

O primeiro passo a efectuar em qualquer dos casos de estudo é o de definir as propriedades do mesmo. Para o caso com dois GDL, as propriedades susceptíveis a alteração definiram-se da forma representada na figura 5.1.

```
8 %% propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
9 - f=[0 10]'; %excitação por GDL
10 - m=[2,0; 0, 1]; %matriz de massa
11 - k=[6, -2; -2, 4]; %matriz de rigidez
12 - ksi=[.05; .05]; %razao de amortecimento
```

Figura 5.1: Propriedades do sistema com de 2GDL.

Com as variáveis da função definidas da seguinte forma, a excitação é aplicada no segundo GDL e o sistema apresenta um acoplamento elástico ou de rigidez.

Estando as propriedades do sistema estabelecidas, seguem-se as variáveis de medição

que serão utilizadas ao longo do processo de identificação por AMO. Apesar do presente caso de estudo permitir a possibilidade de inclusão ou não de amortecimento, as variáveis de medição serão, numa primeira análise, as mesmas para os dois casos. A principal razão para manter as mesmas variáveis de medição deve-se ao facto do método ser mais preciso quanto menor for o amortecimento, logo, para amortecimentos baixos, os valores das frequências naturais de vibração são muito próximos dos valores das frequências naturais do sistema sem amortecimento. Posteriormente, é efectuada uma análise da influência do amortecimento na precisão do método, e, caso seja aplicável, é realizado um ajuste das variáveis de medição.

Assim sendo, para o caso de estudo de dois GDL foram seleccionadas os valores para as variáveis de medição representados na figura 5.2.

```

4      %% Variaveis de medicao
5      %Definir varaveis de medicao (alterar para cada caso)
6      % seleccionar tipo de resposta
7          % 1 - exercicio exemplo de 2 GDL
8          % 2 - exercicio exemplo de 5 GDL
9          % 3 - exercicio exemplo de viga fixa-livre - sem amortecimento
10         % 4 - exercicio exemplo de viga apoio simples-apoio simples - sem amortecimento
11         % 5 - exercicio exemplo de veio livre-livre - sem amortecimento
12     resp=1;
13     %sistema com amortecimento
14     amortecimento=0; %0 - sem amortecimento / 1 - com amortecimento
15     %Graus de liberdade a ser analisados
16     GDL=2;
17     %Frequencia maxima de interesse (em Hz)
18     fmax=1;
19     %Precisao pretendida(sigma/m)
20     p=.2;
21     %Largura de banda efectiva (Be em Hz)
22     Be=.005;
23     %Resolução da resposta mensurada - em funcao da freq de Nyquist (no mínimo 2)
24     ny=2;

```

Figura 5.2: Varáveis de medição para o caso de estudo de 2GDL.

Sendo que as variáveis *resp*, *amortecimento* e *GDL* estão definidas para o caso de estudo de 2GDL sem amortecimento. O valor da frequência máxima de interesse é definido como um valor superior à frequência natural de vibração mais elevada do sistema (2,2361 rad/s que equivale a  $\approx 0,356$  Hertz). O valor seleccionado é mais do que o dobro do valor máximo de interesse, devido à necessidade de não definir um valor demasiado pequeno, algo que influenciaria negativamente o passo da resposta do sistema. A variável de precisão *p* é definida com o valor de 0,2, sendo que, quanto menor for este valor maior será a precisão do método. Este valor também não deve ser exageradamente pequeno porque, quanto menor for, maior será o tempo total de medição requerido. Já a largura de banda efectiva *Be*, é definida como 0,005 para se obter precisão na resposta até à segunda casa decimal. Por último, a variável *ny* é definida como 2, que é o valor mínimo aconselhável, para o passo de medição ser igual ao dobro do inverso da frequência de Nyquist.

Estando as variáveis de medição definidas, é então possível correr o programa e analisar os resultados obtidos.

### Sem Amortecimento

Utilizando as variáveis de medição estabelecidas anteriormente e selecionando o caso de estudo de dois GDL sem amortecimento, obteve-se o gráfico ANPSD da figura 5.3. Destaca-se a presença de dois picos referentes às duas frequências naturais de vibração. Visto que o sistema não apresenta amortecimento, a presença dos modos naturais de vibração é muito proeminente. Assim sendo, o gráfico contém uma grande descontinuidade entre pontos, mesmo com uma resolução relativamente baixa.

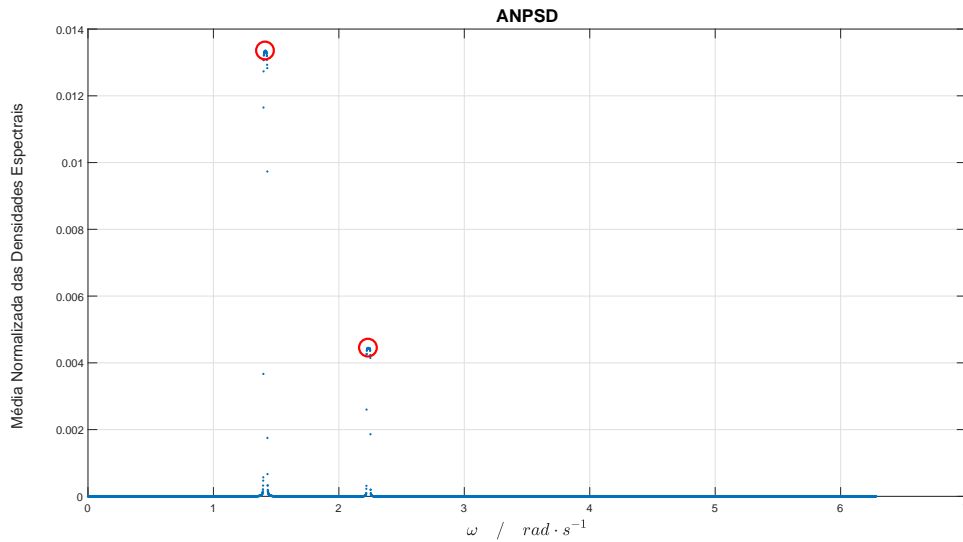


Figura 5.3: ANPSD para o caso de estudo de 2GDL sem amortecimento.

A partir do gráfico 5.3, retira-se as frequências naturais experimentais indicadas na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 2GDL sem amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	
Frequências experimentais	1,4144	2,2351	[rad/s]

Quando comparados os valores das frequências experimentais com os valores teóricos, obtém-se erros relativos representados na tabela 5.2.

Tabela 5.2: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 2GDL sem amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	
Frequências teóricas	1,4142	2,2361	[rad/s]
Erro relativo	0,0113	0,0443	[%]
Média dos erros	0,0278		[%]

Como se pode verificar, os valores obtidos para as frequências naturais são extremamente próximos. No caso da frequência natural fundamental, o erro relativo é de 0,0113%, enquanto

na segunda frequência é de 0,0443%. O valor médio dos erros relativos é apenas 0,0278%.

No caso dos vectores modais, os valores obtidos experimentalmente estão indicados na tabela 5.3.

Tabela 5.3: Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso de 2GDL sem amortecimento.

	$u_1$	$u_2$
Vectores modais experimentais	1	1
	1	-1,9998

Já a tabela 5.4 apresenta o erro relativo dos mesmos quando comparados com os valores obtidos teoricamente.

Tabela 5.4: Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso de 2GDL sem amortecimento.

	$u_1$	$u_2$	
Vectores modais teóricos	1	1	
	1	-2	
Erro relativo	NA	NA	
	0,0019	0,0101	[%]
Média dos erros	0,0060		[%]

Novamente, pode-se verificar que o erro relativo presente no cálculo dos vectores modais é extremamente reduzido, sendo, no pior caso, aproximadamente 0,01%. O erro relativo do primeiro vector modal não é nulo porque o valor representado é uma aproximação, mas para representar o seu valor real seria necessário recorrer a seis casas decimais, algo que se considerou desnecessário. Quanto aos elementos da tabela indicados como NA (não aplicável), estão sinalizados desta forma porque são o elemento de normalização dos vectores, logo, o seu valor é sempre igual a 1, independentemente do erro presente no cálculo.

Tendo em conta que o sistema em análise apenas contém dois GDL, a representação das formas naturais de vibração é facilmente interpretada através dos valores obtidos numericamente. O primeiro modo de vibração apresenta os dois GDL em fase e com a mesma amplitude. Já no segundo modo natural, os GDL encontram-se em oposição de fase, criando um nodo de vibração entre os dois corpos, e o segundo GDL apresenta uma amplitude do dobro em valor absoluto do primeiro. Assim sendo, considerou-se desnecessária a representação gráfica destas grandezas.

Na figura 5.4 pode-se ver a resposta do segundo GDL do sistema em função do tempo. De notar que apenas é representada a resposta entre 0 e  $50/\omega_1$  por motivos de simplificação de visualização, porque, caso fosse representada a resposta do tempo total de medição ( $5 \times 10^3 s$ ), não seria possível retirar grande detalhe de informação visualmente.



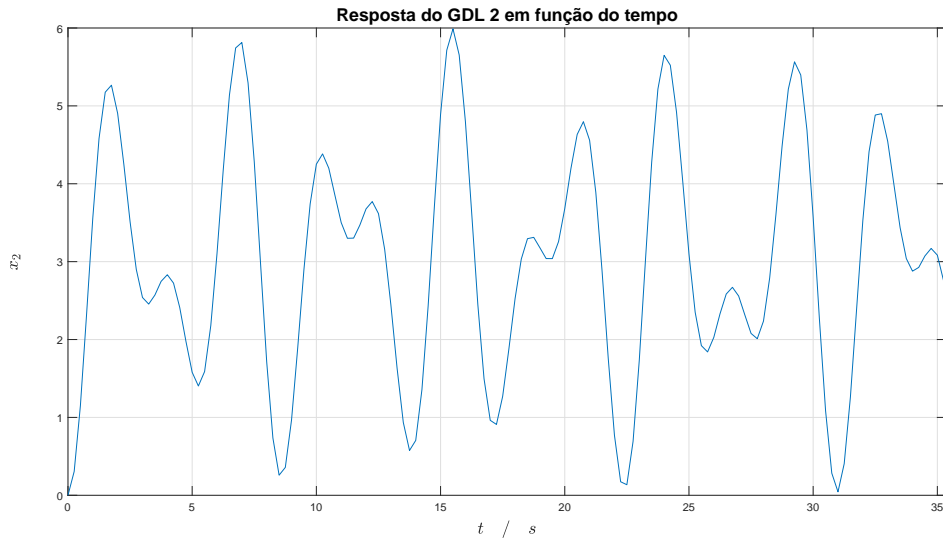


Figura 5.4: Resposta do segundo GDL do sistema em função do tempo.

A resposta representada na figura 5.4 apresenta uma resolução suficiente para serem extraídas as propriedades modais com precisão mais que satisfatória, o que significa que o passo de medição se encontra adequado ao caso de estudo em questão. Seria possível aumentar ainda mais o detalhe da resposta alterando a variável  $ny$  para um valor superior a 2, mas dessa forma também se aumentaria o tempo total de medição e o tempo de processamento do programa. Caso o tempo de medição fosse considerado demasiado longo, poderia-se aumentar o passo da medição da resposta, sabendo que o detalhe da mesma iria ser inferior. Tendo em conta os resultados obtidos, considerou-se que o equilíbrio obtido entre precisão das propriedades modais e o tempo de medição é satisfatório.

### Com Amortecimento

Neste segundo exemplo para validação do algoritmo, utilizou-se o mesmo caso de estudo com dois GDL, mas com a presença de amortecimento. A razão de amortecimento selecionada foi de 5% para os dois modos de vibração e definiu-se as mesmas variáveis de medição do que no caso anterior.

Com os parâmetros de medição estabelecidos, obteve-se o gráfico ANPSD representado na figura 5.5.

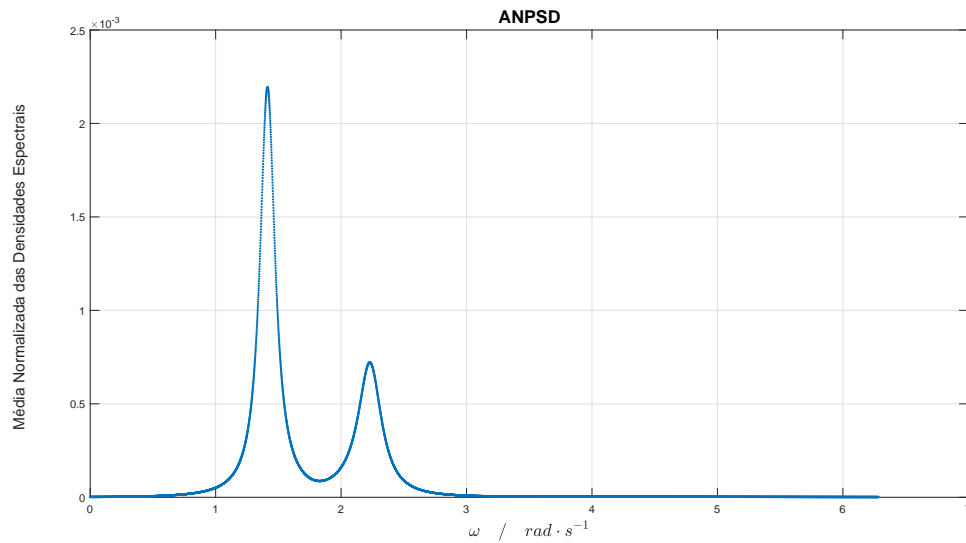


Figura 5.5: ANPSD para o caso de estudo de 2GDL com amortecimento.

Graças à presença de amortecimento no sistema, os picos da resposta na proximidade das frequências de ressonância são menos proeminentes do que no caso anterior. Desta forma, obtém-se um gráfico ANPSD com variações mais suaves e um aspecto mais contínuo. Tal facto pode levar a concluir que a resolução neste caso aparente ser superior ao caso anterior, algo que não é verdade considerando que as variáveis de medição são exactamente as mesmas.

A partir do gráfico representado na figura 5.5 é então possível retirar as frequências naturais de vibração indicadas na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 2GDL com amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	
Frequências experimentais	1,4128	2,2289	[rad/s]

Comparando os valores obtidos experimentalmente com os valores teóricos obtém-se os erros relativos representados na tabela 5.6.

Tabela 5.6: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 2GDL com amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	
Frequências teóricas	1,4124	2,2333	[rad/s]
Erro relativo	0,0279	0,1938	[%]
Média dos erros	0,1109		[%]

Como se pode ver na tabela 5.6, os valores dos erros relativos obtidos são superiores no caso com amortecimento do que no caso anterior. Já era expectável o aumento do erro de medição tendo em conta que o método aplicado é susceptível à presença de amortecimento.

Mesmo assim, o erro obtido é reduzido, sendo no pior caso inferior a 0,2%, um valor aceitável para a grande maioria dos casos práticos.

Já os vectores modais, obteve-se os valores representados na tabela 5.7.

Tabela 5.7: Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso de 2GDL com amortecimento.

	$u_1$	$u_2$
Vectores modais experimentais	1	1
	1,0572	2,1425

Tendo em conta que os vectores modais deveriam ser iguais ao caso anterior, os valores obtidos apresentam erros consideráveis. Primeiro, é notório que o erro seria consideravelmente superior neste caso, segundo, e mais grave, o segundo vector modal apresenta os dois GDL em fase quando deveriam estar em oposição de fase. Analisando o programa e as suas variáveis, verifica-se que a razão para o sinal errado do segundo vector modal, deve-se ao facto do ângulo de fase do GDL à frequência de ressonância ser  $\approx 158^\circ$ . Como já foi explicado, o algoritmo altera o sinal do vector modal quando o ângulo de fase do elemento da matriz DE a ser analisado é próximo de  $180^\circ$ , mas como o valor é bastante inferior, esse elemento do vector modal surge com o sinal errado. Alterando o sinal para o valor correcto, o erro relativo entre os vectores modais calculados experimentalmente e teoricamente é o indicado na tabela 5.8.

Tabela 5.8: Erro relativo dos vectores modais para o caso de 2GDL com amortecimento.

	$u_1$	$u_2$	
Erro relativo	NA	NA	
	5,4083	6,6520	[%]
Média dos erros	6,0302		[%]

Como se pode observar, os erros relativos obtidos neste caso de estudo são consideravelmente superiores, sendo a média dos erros  $\approx 6\%$ . Assim sendo, a presença de amortecimento, mesmo sendo relativamente baixo (5%), tem uma influência significativa no método utilizado. Para além de aumentar o erro relativo dos dados experimentais, requer uma maior atenção do utilizador ao analisar os dados obtidos para garantir que o sinal dos vectores modais esteja correcto.

Com isso em mente, realizou-se uma análise da influência do amortecimento no sistema com dois GDL. A figura 5.6 demonstra a influência do aumento do amortecimento no erro relativo das propriedades modais.

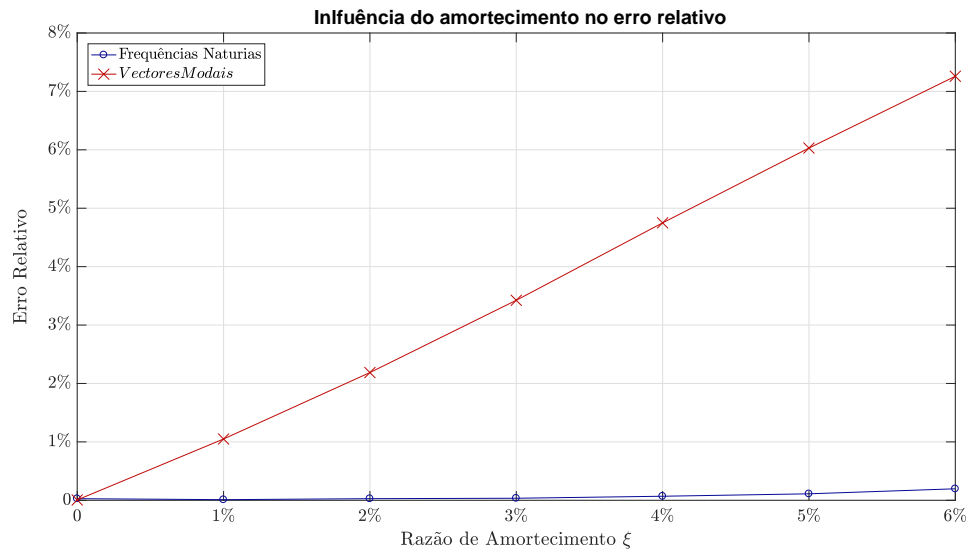


Figura 5.6: Influência do amortecimento no erro relativo das propriedades modais.

Como se pode ver no gráfico representado na figura 5.6, a presença de amortecimento no sistema tem uma influência reduzida no cálculo das frequências naturais. Apesar do erro relativo crescer com o aumento do amortecimento, esse erro mantém-se reduzido, sendo inferior a 0,2% mesmo com 6% de razão de amortecimento. Adicionalmente, esse aumento do erro pode ser explicado pela diferença de conceito entre frequência natural amortecida e frequência de ressonância. Na prática, o valor calculado experimentalmente é a frequência de ressonância e não a frequência natural amortecida, sendo que as duas grandezas são muito próximas para valores de amortecimento reduzidos. Assim sendo, os erros presentes no cálculo das frequências naturais são aceitáveis, o que significa que o método aparenta ser fiável no cálculo das frequências naturais mesmo para sistemas que apresentem valores de amortecimento reduzidos.

Contudo, a figura 5.6 também demonstra um crescimento considerável do erro relativo no cálculo dos vectores modais com o aumento do amortecimento. Mesmo para valores de amortecimento muito reduzidos, o erro presente não é desprezável. Adicionalmente, é necessário uma atenção redobrada por parte do utilizador para verificar o sinal correcto dos elementos dos vectores modais. Assim sendo, é aconselhado algum cuidado na extração das propriedades modais (nomeadamente, nos vectores modais) quando o sistema apresenta amortecimento.

### 5.1.2 5 Graus de Liberdade

O segundo sistema utilizado para a validação do algoritmo é o caso de estudo com cinco GDL. Tal como no caso anterior, este exemplo permite a inclusão ou não de amortecimento. Quanto às propriedades do sistema, estas foram definidas como o indicado na figura 5.7.

```

8  %% propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
9  f=[10 10 0 0 0]'; %excitacao por GDL
10 m=eye(5); %matriz de massa
11 k=[3,0,-2,0,0;0,4,-3,0,0;-2,-3,10,-3,-2;0,0,-3,4,0;0,0,-2,0,3]; %matriz de rigidez
12 amort=2; %(1 ou 2)1 - amortecimento em função de c / 2 - amortecimento definido ksi
13 c=[3,0,-2,0,0;0,4,-3,0,0;-2,-3,10,-3,-2;0,0,-3,4,0;0,0,-2,0,3]; %matriz de amortecimento
14 ksi=[.05; .05; .05; .05; .05]; %razões de amortecimento

```

Figura 5.7: Propriedades do sistema com de 5GDL.

Neste caso, a excitação encontra-se aplicada no primeiro e no segundo GDL. A matriz de massa é uma matriz identidade e o sistema apresenta acoplamento elástico ou de rigidez.

Para definir as variáveis de medição, numa primeira instância, adoptou-se os mesmos valores que no caso com dois GDL. Apesar dos resultados obtidos serem satisfatórios, apresentaram uma precisão inferior ao desejado. Então, com o intuito de obter as propriedades modais com maior precisão, alterou-se a variável de largura de banda efectiva ( $Be$ ) de 0,005 Hz para 0,001 Hz. Esta alteração permitiu aumentar a precisão dos resultados obtidos, contudo, provocou um aumento do tempo de medição (de  $5 \times 10^3$ s para  $2,5 \times 10^4$ s) e do tempo de cálculo do programa.

#### Sem Amortecimento

Com as variáveis de medição estabelecidas, obteve-se o gráfico de ANPSD representado na figura 5.8.

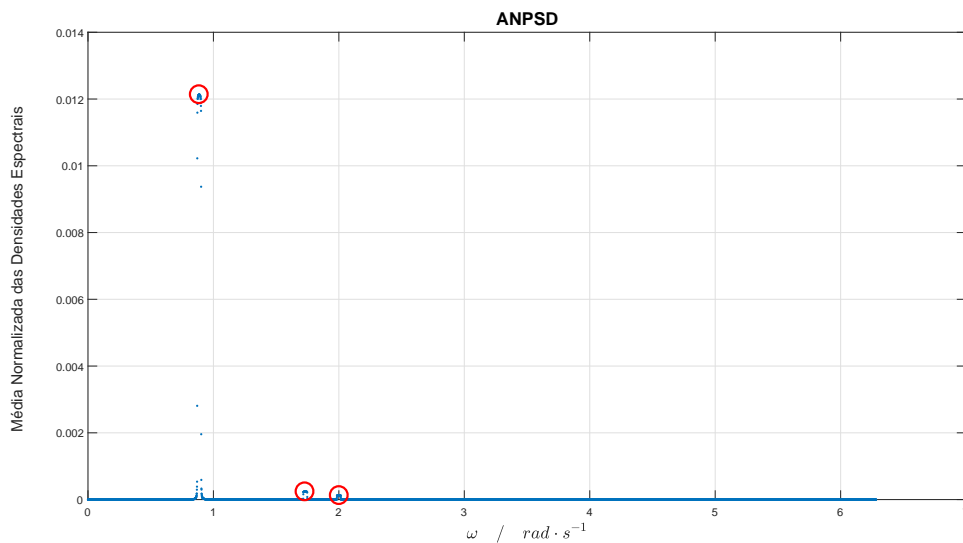


Figura 5.8: ANPSD para o caso de estudo de 5GDL sem amortecimento.

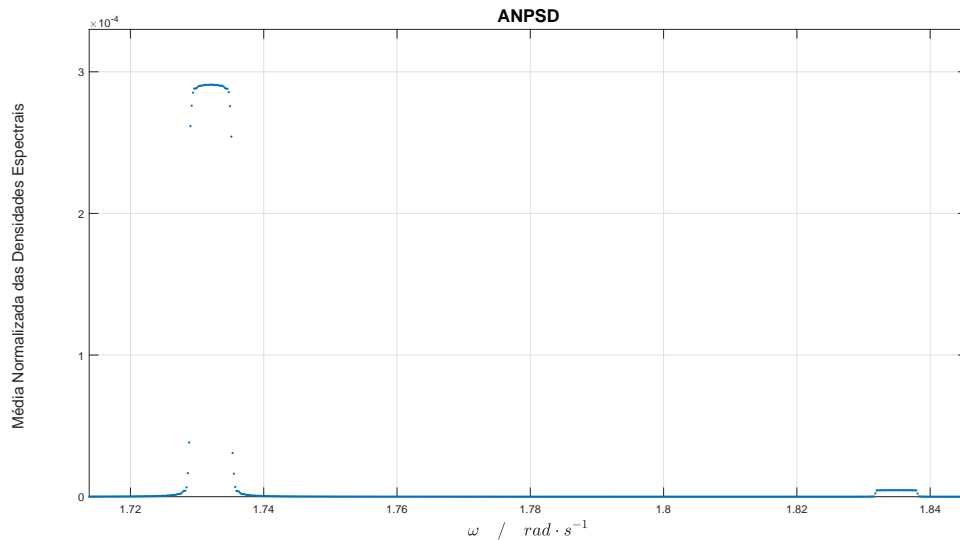
Tal como no caso anterior, devido à ausência de amortecimento, o gráfico ANPSD apresenta variações elevadas na proximidade das ressonâncias, provocando uma distorção na visualização dos dados. Adicionalmente, o gráfico aparenta conter apenas três picos, sendo o primeiro muito mais proeminente do que os restantes.

Mesmo aparentando que o sistema apenas contém três frequências naturais de vibração, os dados obtidos (tabela 5.9) apresentam cinco frequências naturais de vibração como seria de esperar.

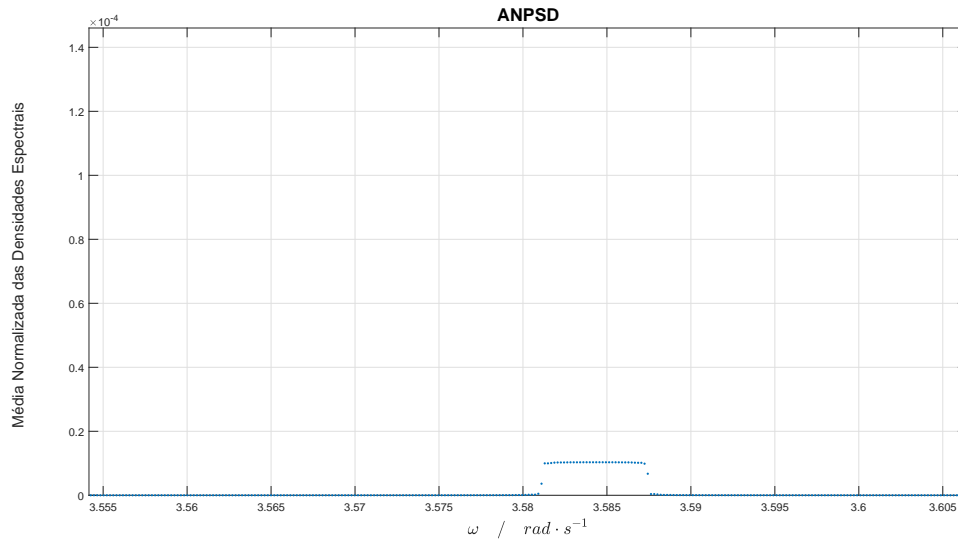
Tabela 5.9: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 5GDL sem amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	
Freq. exp.	0,8868	1,7321	1,8345	1,9998	3,5846	[rad/s]

Ampliando o gráfico ANPSD na zona onde se esperaria encontrar um pico devido à presença de uma frequência natural de vibração, verifica-se que esse pico se encontra presente (figura 5.9). Como se pode ver em 5.9a, o relevo devido à terceira frequência natural é consideravelmente inferior do que o da segunda, tornando-o imperceptível no gráfico sem ampliação. Em 5.9b pode-se ver o pico correspondente à quinta frequência natural de vibração.



(a) Pico da segunda e terceira frequência natural.



(b) Pico da quinta frequência natural.

Figura 5.9: Ampliação do gráfico ANPSD para o caso de 5GDL sem amortecimento.

Comparando os valores das frequências naturais obtidas experimentalmente com os obtidos teoricamente, obtém-se os erros relativos indicados na tabela 5.10.

Tabela 5.10: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 5GDL sem amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	
Freq. teo.	0,8866	1,7321	1,8349	2	3,5843	[rad/s]
Erro relativo	0,0289	0,0011	0,0253	0,0125	0,0079	[%]
Média dos erros	0,0151					[%]

Como se pode ver na tabela 5.10, os valores dos erros relativos obtidos são extremamente reduzidos, sendo sempre inferior a 0,03%.

Quanto aos vectores modais, os valores obtidos estão representados na tabela 5.11.

Tabela 5.11: Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso de 5GDL sem amortecimento.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
V. m. exp.	1	1	1	0	1
	1,0333	0	-0,8632	1	1,6698
	1,1070	0	-0,1799	0	-4,9248
	1,0333	0	-0,8589	-0,9998	1,6697
	1	-0,9999	0,9897	0	1,0002

Comparando os vectores modais obtidos experimentalmente com os teóricos, obtém-se o erro relativo indicado na tabela 5.12.

Tabela 5.12: Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso de 5GDL sem amortecimento.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	
V. m. teo.	1	1	1	0	1	
	1,0333	0	-0,8695	1	1,6695	
	1,1070	0	-0,1835	0	-4,9235	
	1,0333	0	-0,8695	-1	1,6695	
	1	-1	1	0	1	
Erro relativo	NA	NA	NA	0	NA	[%]
	$\approx 0$	0	0,7275	NA	0,0137	[%]
	$\approx 0$	0	1,9716	0	0,0255	[%]
	$\approx 0$	0	1,2312	0,0205	0,0102	[%]
	$\approx 0$	0,009	1,0421	0	0,0219	[%]
Média dos erros	$\approx 0$	0,0023	1,2431	0,0051	0,0178	[%]
Média err. total			0,2538			[%]

Como se pode ver na tabela 5.12, os erros relativos obtidos são reduzidos, sendo a média dos erros inferior a 0,3%. O vector modal que apresenta maior erro é o correspondente ao terceiro modo natural de vibração, sendo também esse o modo de menor amplitude no gráfico ANPSD. Aliás, o erro relativo está directamente relacionado com a amplitude do respectivo modo de vibração, sendo menor quanto maior for a amplitude apresentada no gráfico ANPSD.

O presente caso de estudo apresenta uma particularidade em relação ao caso anterior. Em determinados modos de vibração (segundo e quarto neste caso), alguns dos GDL do sistema são nodos de vibração, o que implica a ausência de movimento. Na figura 5.10 pode-se ver a representação gráfica do quarto modo de vibração que exemplifica este fenómeno.



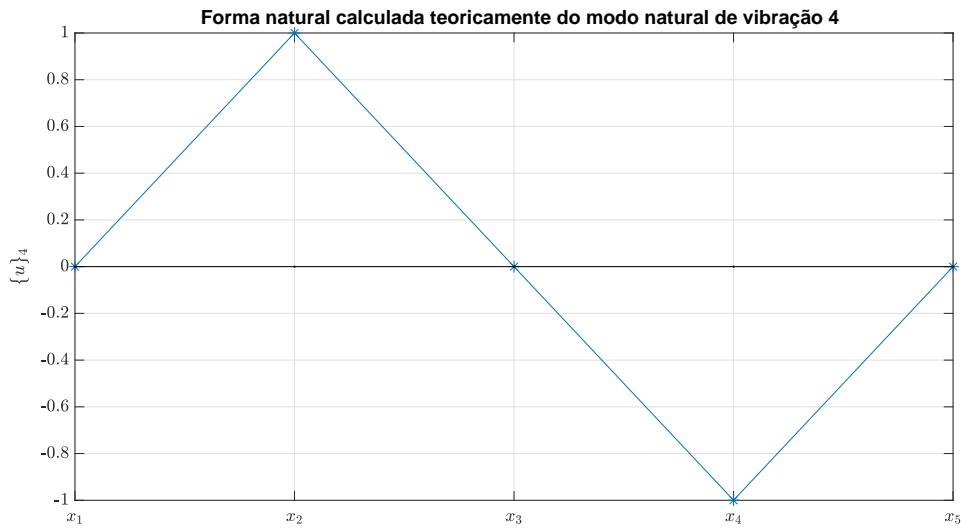


Figura 5.10: Forma de vibração do quarto modo de vibração do caso de estudo de 5GDL sem amortecimento.

Assim sendo, decidiu-se testar o que aconteceria se a excitação fosse aplicada num desses nodos de vibração. Com esse intuito, aplicou-se a excitação apenas no terceiro GDL. Como seria de esperar, apenas foram detectados três modos de vibração: o primeiro, o terceiro e o quinto, ou seja, os modos de vibração em que o terceiro GDL não é um nodo de vibração. Na figura 5.11 pode-se ver o gráfico ANPSD correspondente ao caso em questão.

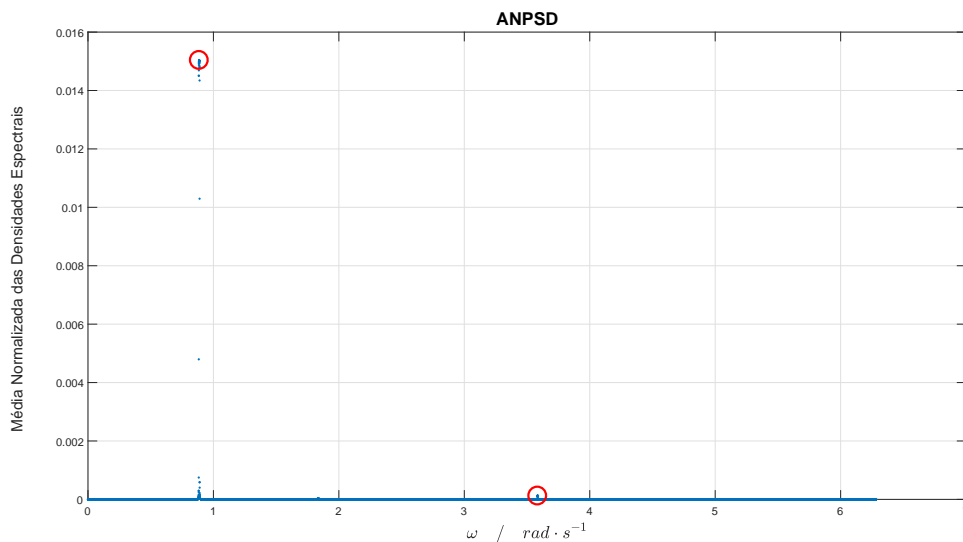


Figura 5.11: ANPSD para o caso de estudo de 5GDL sem amortecimento com excitação apenas no terceiro GDL.

Analisando a figura cuidadosamente, é possível observar dois picos correspondentes a dois dos três modos de vibração referidos (o segundo é quase imperceptível). Curiosamente, a quinta frequência natural de vibração apresenta uma amplitude superior ao caso anterior. Comparando a média do erro relativo do quinto vector modal deste caso com o anterior,

verifica-se uma melhoria (de 0,0178% para 0,0062%), o que significa que a precisão dos dados obtidos é influenciada pelo GDL que está a ser excitado. Assim sendo, e para evitar excitar a estrutura num nodo de vibração, é aconselhável que sejam excitados vários GDL com diferentes amplitudes de força, de forma a garantir que todos os modos de vibração contribuam para a resposta do sistema.

### Com Amortecimento

Utilizando as mesmas variáveis de medição que no caso anterior, voltou-se a analisar o caso de estudo com cinco GDL, mas com a presença amortecimento. Para o efeito, foi selecionado uma razão de amortecimento de 5% para os cinco modos de vibração. Com o amortecimento definido, obteve-se o seguinte gráfico ANPSD representado na figura 5.12.

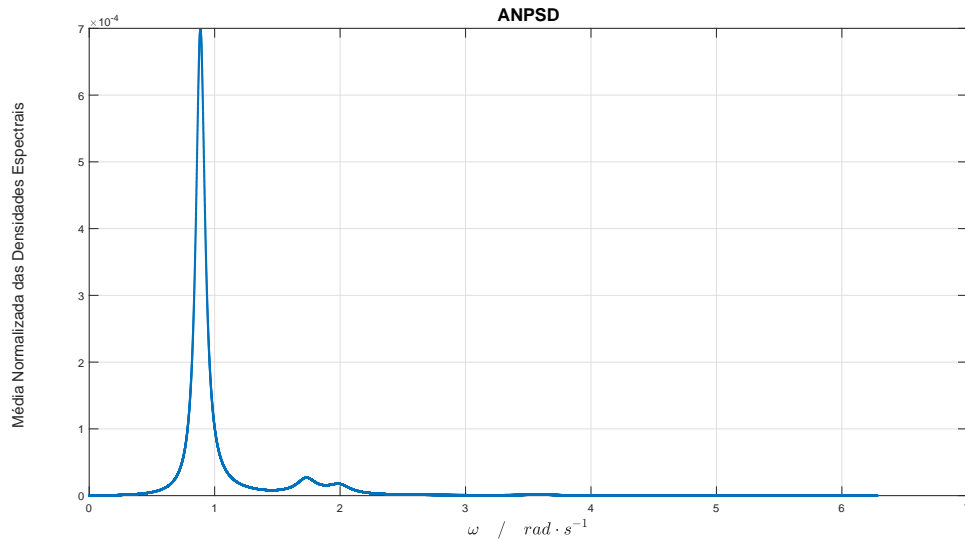


Figura 5.12: ANPSD para o caso de estudo de 5GDL com amortecimento.

Tal como no exemplo com dois GDL, o gráfico ANPSD apresenta uma variação mais suave na vizinhança da ressonância devido à presença de amortecimento. Analisando o gráfico da figura 5.12, é possível retirar as seguintes frequências de ressonância:

Tabela 5.13: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 5GDL com amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	
Freq. exp.	0,8865	1,7328	1,9813	3,5828	[rad/s]

Como se pode ver na tabela 5.13, devido à presença do amortecimento, apenas são detectados quatro frequências naturais de vibração. Adicionalmente, como as frequências naturais são muito próximas entre si, deve ocorrer uma sobreposição dos modos naturais de vibração, algo que o método escolhido não é capaz de detectar. Definindo a largura de banda de um modo de vibração como  $B = 2\xi\omega_n$  [Brincker and Ventura, 2015], em que  $\xi$  é a razão de amortecimento do modo e  $\omega_n$  a frequência natural, obtém-se os valores de largura de banda dos modos 2 e 3 indicados na tabela 5.14.

Tabela 5.14: Largura de banda do segundo e terceiro modo natural de vibração para o caso de 5GDL com amortecimento.

$B_2$	$B_3$	
0,1733	0,1981	[rad/s]

Segundo [Brincker and Ventura \[2015\]](#), um modo natural de vibração é bem espaçado dos restantes se a distância entre frequências naturais for superior à largura de banda dos modos em questão. Assim sendo, o segundo modo natural de vibração apresenta uma largura de banda que varia entre  $1,5595 < \omega_2 < 1,9061$  rad/s, enquanto a largura de banda do terceiro modo varia entre  $1,7832 < \omega_3 < 2,1794$  rad/s. Logo, ocorre sobreposição de modos naturais de vibração.

Para evitar este fenómeno, definiram-se novas razões de amortecimento com os valores indicados na tabela [5.15](#).

Tabela 5.15: Razões de amortecimento para o caso de 5GDL.

$\xi_1$	$\xi_2$	$\xi_3$	$\xi_4$	$\xi_5$	
6	1	1	1	1	[%]

Definiu-se razão de amortecimento do primeiro modo de vibração como 6% para reduzir a amplitude do primeiro pico no gráfico ANPSD e dar maior relevo aos restantes modos de vibração. Desta forma, obteve-se o gráfico ANPSD da figura [5.13](#), onde se pode ver a presença de três picos de amplitude considerável, e um quarto ligeiramente afastado dos restantes.

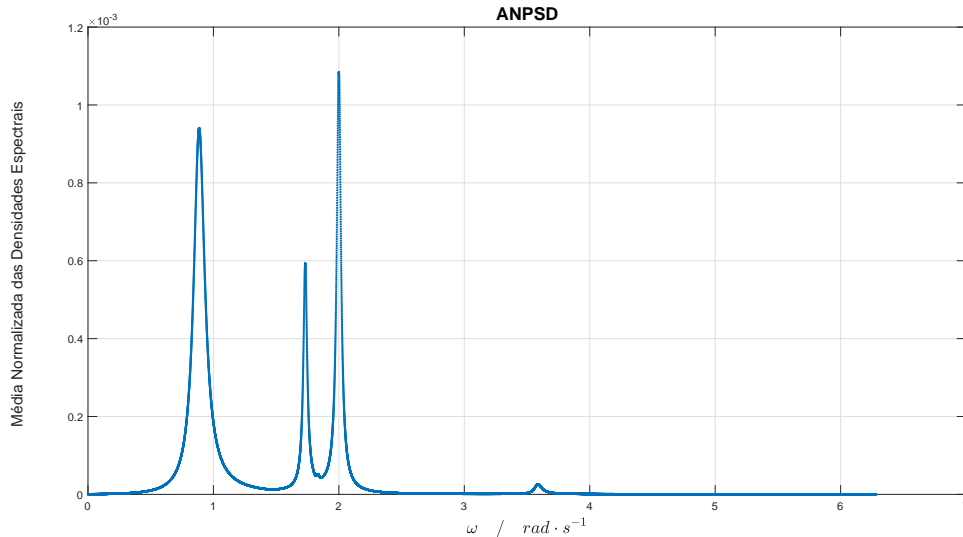


Figura 5.13: ANPSD para o caso de estudo de 5GDL com as novas razões de amortecimento.

Ampliando a zona onde se esperaria encontrar a terceira frequência natural, é possível ver a presença do terceiro modo natural de vibração (figura [5.14](#)).

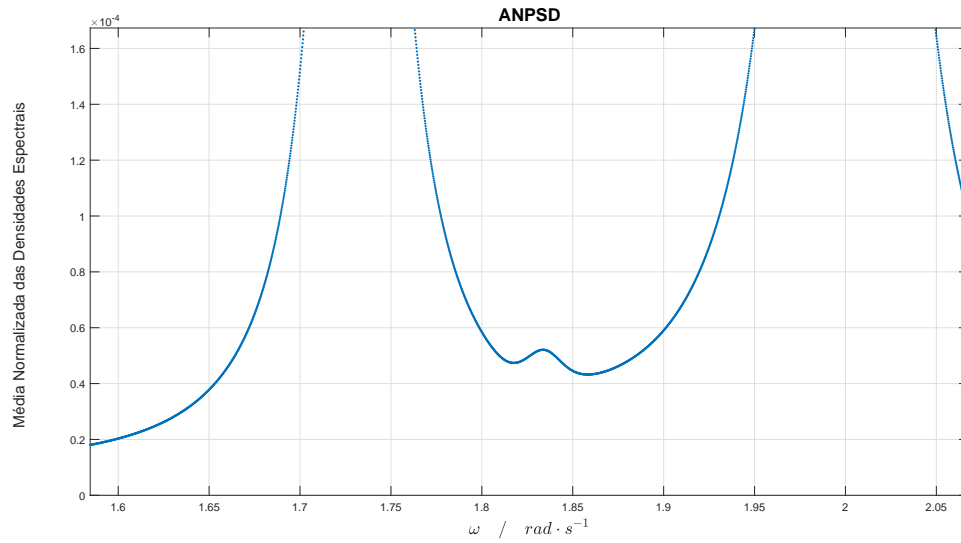


Figura 5.14: Ampliação do gráfico ANPSD para o caso de 5GDL com amortecimento.

Desta forma, obteve-se as frequências naturais representadas na tabela 5.16.

Tabela 5.16: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o caso de 5GDL com amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	
Freq. exp.	0,8865	1,7321	1,8337	1,9999	3,5874	[rad/s]

Comparando os vectores obtidos experimentalmente com os teóricos, obtém-se os valores indicados na tabela 5.17.

Tabela 5.17: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso de 5GDL com amortecimento.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$	$\omega_5$	
Freq. teo.	0,885	1,7320	1,8348	1,9999	3,5841	[rad/s]
Erro relativo	0,1661	0,0061	0,0725	0,0021	0,0932	[%]
Média dos erros	0,068					[%]

Como seria de esperar, os erros aumentaram relativamente ao caso sem amortecimento, mas mantém-se em valores aceitáveis. De notar que, como o primeiro modo de vibração apresenta o maior amortecimento, também é o modo com maior erro relativo.

Quanto aos vectores modais, os valores obtidos experimentalmente estão representados na tabela 5.18.

Tabela 5.18: Vectors modais obtidos experimentalmente para o caso de 5GDL com amortecimento.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
V. m. exp.	1	1	1	1	1
	1,0317	0,0146	-0,2597	7,0838	1,3947
	1,0935	0,0461	0,1852	0,3323	3,1728
	1,0183	0,0983	0,6118	6,9515	-1,1633
	0,9857	-0,9792	0,6435	-0,299	-0,7121

Tal como no exemplo com dois GDL, os vectores modais deveriam ser iguais ao caso de 5GDL sem amortecimento. Contudo, como se pode ver na tabela 5.19, os resultados obtidos apresentam erros elevados. Para além de apresentarem erros consideráveis em valor absoluto, mesmo o sinal de certos elementos dos vectores modais estão errados. Adicionalmente, os valores residuais que normalmente são arredondados para zero, não são suficientemente pequenos para o efeito, provocando discrepâncias ainda maiores nos restantes elementos do vector. A imprecisão tão elevada no cálculo desta propriedade modal deve-se, principalmente, a dois factores. Primeiro, o amortecimento introduz logo à partida algum erro no método utilizado (como foi visto no caso de 2GDL com amortecimento); Segundo, o caso de estudo em questão apresenta modos de vibração próximos, o que faz com que ocorra interferência entre os modos, deturpando os resultados obtidos.

Tabela 5.19: Erro relativo dos vectores modais para o caso de 5GDL com amortecimento.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$	
Erro relativo	NA	NA	NA	$\infty$	NA	
	0,1497	$\infty$	234,8	608,3	19,704	[%]
	1,2293	$\infty$	199	$\infty$	255,2	[%]
	1,4688	$\infty$	242,1	795,2	243,5	[%]
	1,445	2,1250	55,39	$\infty$	240,3	[%]

O único vector que apresenta valores de erro inferiores a 2% é o correspondente ao primeiro modo de vibração. Os restantes apresentam valores de erro inaceitáveis. Mesmo que fossem corrigidos os sinais dos elementos, o erro manteria-se demasiado elevado na grande maioria dos casos. A principal razão de se obter valores tão díspares deve-se à interferência entre modos de vibração, algo muito proeminente entre o segundo, terceiro e quarto modo natural de vibração.

### 5.1.3 Viga com Condições Fronteira Fixa-Livre

O terceiro sistema utilizado para validação do algoritmo é composto por uma viga encastrada numa extremidade e livre na outra. Tal como nos restantes casos de estudo, o primeiro passo a efectuar é o de definir as propriedades do sistema. Como se pode ver na figura 5.15, o material seleccionado para a composição da viga é o alumínio.

```

4  %% propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
5      %massa volumica em kilograma por metro cubico
6  -      ro=2700; %[kg/m^3]
7      %modulo de elasticidade longitudinal em Pascal
8  -      E=69e9; %[Pa]
9      %largura/espessura em metros
10 -      b=2e-3; %[m]
11      %altura em metros
12 -      h=40e-3; %[m]
13      %comprimento em metros
14 -      l=500e-3; %[m]
15      %excitação por GDL
16 -      f=zeros(GDL,1); %[N]
17 -      f(GDL,1)=1;
18 -      f(4,1)=100;

```

Figura 5.15: Propriedades do sistema da viga fixa-livre.

A viga em análise apresenta um comprimento de 500mm e uma área da secção recta de  $2 \times 40 \text{ mm}^2$ . A excitação é aplicada no quarto e no último (extremidade livre) GDL. Definidas as propriedades do sistema e da excitação, a figura 5.16 demonstra os valores seleccionados para as variáveis de medição.

```

5  %% Variaveis de medicao
6  %Definir varaveis de medicao (alterar para cada caso)
7      % seleccionar tipo de resposta
8      % 1 - exercicio exemplo de 2 GDL
9      % 2 - exercicio exemplo de 5 GDL
10     % 3 - exercicio exemplo de viga fixa-livre - sem amortecimento
11     % 4 - exercicio exemplo de viga apoio simples-apoio simples - sem amortecimento
12     % 5 - exercicio exemplo de veio livre-livre - sem amortecimento
13 -     resp=3;
14     %sistema com amortecimento
15 -     amortecimento=0; %0 - sem amortecimento / 1 - com amortecimento
16     %Graus de liberdade a ser analisados
17 -     GDL=11;
18     %Frequencia maxima de interesse (em Hz)
19 -     fmax=200;
20     %Precisao pretendida(sigma/m)
21 -     p=.2;
22     %Largura de banda efectiva (Be em Hz)
23 -     Be=1;
24     %Resolução da resposta mensurada - em funcao da freq de Nyquist (no minimo 2)
25 -     ny=2;

```

Figura 5.16: Variáveis de medição para o sistema da viga fixa-livre.

Para este caso de estudo, o número de GDL seleccionado é de 11 para as formas naturais serem claramente descritivas do comportamento real da viga. Adicionalmente, o número escolhido é ímpar para que o sistema apresente um GDL a meio vão da viga. A frequência máxima de interesse é de 200 Hz, ou seja, só são representadas as frequências naturais de vibração até esse valor. A precisão, tal como nos casos anteriores, é de 0,2, e a largura de banda efectiva é de 1 Hz, visto que os valores das frequências serão consideravelmente

superiores aos vistos nos outros casos de estudo. Por último, a variável que é utilizada como um factor de multiplicação da resolução da resposta é igual a 2 (valor mínimo), porque, devido ao valor elevado da frequência máxima de interesse, o passo da resposta já é suficientemente pequeno.

Com as propriedades do sistema e as variáveis de medição definidas, obteve-se o gráfico ANPSD representado na figura 5.17, onde se pode ver claramente a presença do primeiro modo natural de vibração.

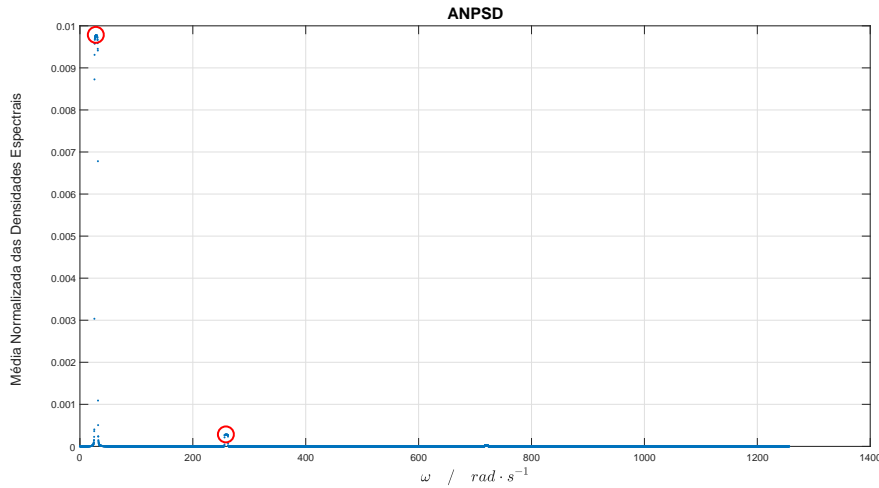


Figura 5.17: ANPSD para o sistema da viga fixa-livre.

Com a presente escala do gráfico ANPSD, o sistema aparenta conter apenas dois modos de vibração. No entanto, como se pode ver na tabela 5.20, o algoritmo detecta três frequências naturais.

Tabela 5.20: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o sistema da viga fixa-livre.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	
Frequências experimentais	28,8397	257,4098	720,6862	[rad/s]

Ampliando a zona do gráfico onde seria espectável encontrar a terceira frequência natural, pode-se observar na figura 5.18 a influência do terceiro modo natural de vibração.

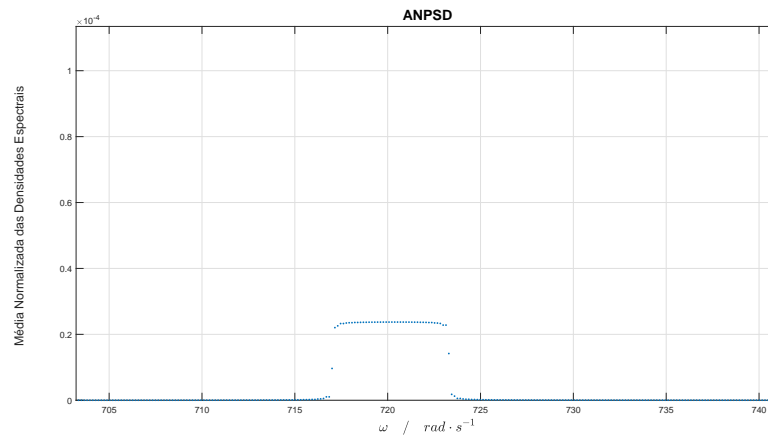


Figura 5.18: Ampliação do gráfico ANPSD na zona da terceira frequência natural do sistema da viga fixa-livre.

Como se pode ver pela escala no eixo das ordenadas, a ordem de grandeza da amplitude do terceiro pico é três vezes inferior ao primeiro, daí ser imperceptível a sua presença no gráfico da figura 5.17.

Comparando os valores das frequências obtidos experimentalmente com os valores teóricos, obteve-se os erros relativos representados na tabela 5.21.

Tabela 5.21: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso da viga fixa-livre.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	
Frequências teóricas	28,8059	259,2533	720,1481	[rad/s]
Erro relativo	0,1173	0,001	0,0321	[%]
Média dos erros		0,0502		[%]

Analisando a tabela 5.21, observa-se que erro relativo obtido no cálculo das frequências naturais é bastante reduzido, sendo a média dos erros inferior a 0,1%.

Quanto aos vectores modais, os valores obtidos experimentalmente encontram-se representados na tabela 5.22.



Tabela 5.22: Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso da viga fixa-livre.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
V. m. exp.	0	0	0
	1	1	1
	3,8885	3,2474	2,6506
	8,4988	5,6685	3,3161
	14,6669	7,3513	2,3064
	22,2342	7,6571	0,0865
	31,0511	6,2982	-2,0781
	40,9814	3,3510	-2,8847
	51,9083	-0,8110	-1,7345
	63,7399	-5,6591	0,999
	76,4161	-10,7103	4,3837

Tabela 5.23: Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso da viga fixa-livre.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
V. m. teo.	0	0	0	
	1	1	1	
	3,8885	3,2473	2,6507	
	8,4988	5,6682	3,3164	
	14,667	7,3506	2,3071	
	22,2343	7,6558	0,0876	
	31,0511	6,2961	-2,0765	
	40,9815	3,3479	-2,8828	
	51,9085	-0,8152	-1,7326	
	63,7403	-5,6644	1,0008	
	76,4165	-10,7169	4,3854	
Erro relativo	0	0	0	[%]
	NA	NA	NA	
	$\approx 0$	0,0019	0,0028	[%]
	$\approx 0$	0,0047	0,0092	[%]
	0,0001	0,009	0,0303	[%]
	0,0002	0,0167	1,2509	[%]
	0,0003	0,0332	0,0771	[%]
	0,0003	0,0913	0,0644	[%]
	0,0004	0,5097	0,1106	[%]
	0,0005	0,0939	0,1758	[%]
	0,0006	0,0611	0,0377	[%]
Média dos erros	0,0002	0,0821	0,1759	[%]
Média err. total		0,0861		[%]

Comparando os valores dos vectores modais obtidos experimentalmente com os calculados teoricamente, obtém-se os erros relativos representados na tabela 5.23, em que os valores  $\approx 0$  são erros inferiores a 0,0001%. Assim sendo, os erros relativos obtidos no cálculo dos vectores modais são extremamente reduzidos, sendo a média total inferior a 0,1%.

Como o sistema em repouso apresenta os GDL em linha, a representação gráfica das formas naturais de vibração são representações muito aproximadas do comportamento real da viga. Assim sendo, as figuras 5.19 demonstram as formas de vibração associadas a cada modo natural de vibração.

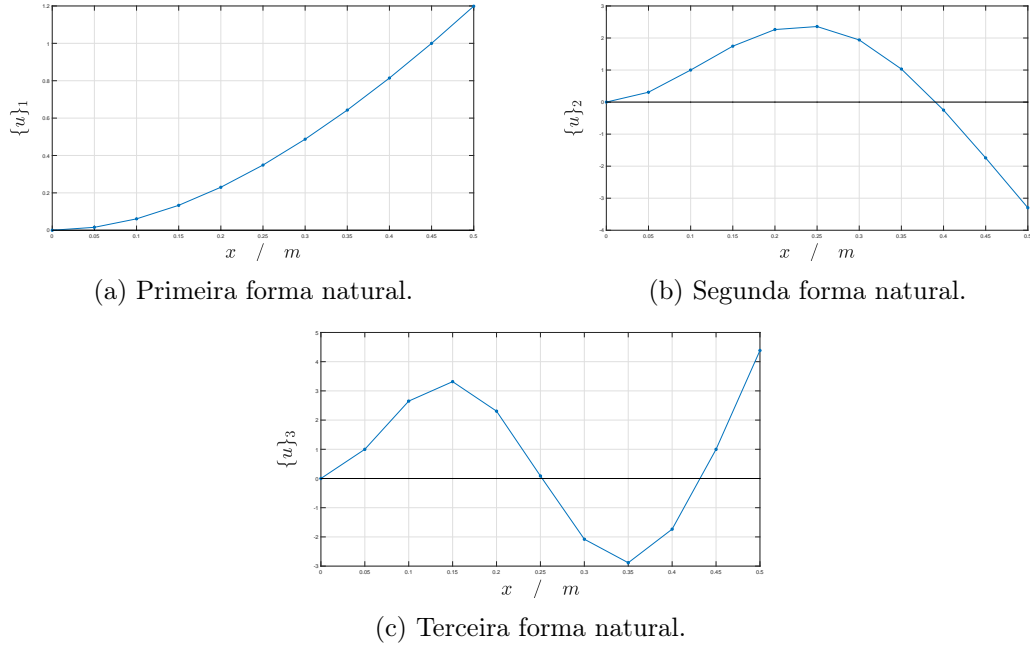


Figura 5.19: Formas naturais de vibração identificadas do sistema viga fixa-livre.

Em 5.19a, observa-se que todos os GDL se encontram em fase e que o GDL com maior amplitude é o último (extremidade livre). No segundo (5.19b), a viga apresenta um nodo de vibração entre o oitavo e o nono GDL. Já em 5.19c, a viga apresenta dois nodos de vibração, sendo o último GDL o que apresenta a amplitude mais elevada.

#### 5.1.4 Viga com Condições Fronteira Simplesmente Apoiada

O caso de estudo seguinte a ser utilizado foi o de uma viga com as extremidades simplesmente apoiadas. As propriedades da viga mantiveram-se as mesmas que no sistema anterior, sendo que apenas foram alteradas as condições de fronteira. Quanto à excitação, para evitar que o primeiro modo natural de vibração fosse demasiado proeminente em relação aos restantes, seleccionou-se os GDL com menor amplitude de deslocamento no primeiro modo de vibração. Então, aplicou-se a excitação no primeiro e no último GDL.

Utilizando as mesmas variáveis de medição que no caso da viga fixa-livre, obteve-se o gráfico ANPSD representado na figura 5.20.

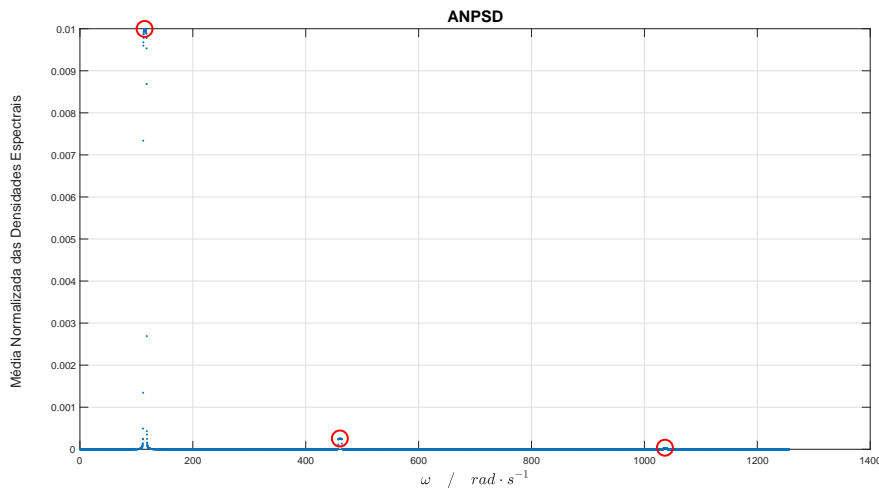


Figura 5.20: ANPSD para o sistema da viga simplesmente apoiada.

Novamente, o pico referente ao primeiro modo natural de vibração é consideravelmente mais elevado que os restantes, sendo que o gráfico aparenta conter dois modos de vibração. Contudo, como mostra a tabela 5.24, foram detectadas três frequências naturais de vibração.

Tabela 5.24: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o sistema da viga simplesmente apoiada.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	
Frequências experimentais	115,2055	461,1283	1037,003	[rad/s]

Como se pode ver na tabela 5.25, o número de frequências naturais expectáveis de se obter para este sistema entre 0 e 200 Hz eram três. Assim sendo, comparando os valores dos obtidos, obtém-se os erros relativos representados na tabela 5.25.

Tabela 5.25: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o caso da viga simplesmente apoiada.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	
Frequências teóricas	115,2237	460,8948	1037,013	[rad/s]
Erro relativo	0,0158	0,0508	0,001	[%]
Média dos erros	0,0225			[%]

Assim sendo, o erro relativo presente no cálculo das frequências naturais é muito pequeno. Mesmo no pior caso, o erro é  $\approx 0,05\%$ .

Na tabela 5.26, pode-se ver os valores obtidos para os vectores modais calculados experimentalmente.

Tabela 5.26: Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso da viga simplesmente apoiada.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
V. m. exp.	0	0	0
	1	1	1
	1,0921	1,6179	1,1756
	2,6181	1,6176	0,3822
	3,0777	0,9991	-0,7261
	3,2361	0	-1,2355
	3,0778	-1,0018	-0,7259
	2,6181	-1,6199	0,3826
	1,9022	-1,6196	1,176
	1,0001	-1,0009	1,0002
	0	0	0

Comparado com os valores obtidos teoricamente, obtém-se o erro relativo representado na tabela 5.27.

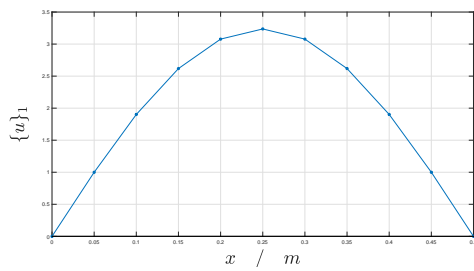
Tabela 5.27: Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o caso da viga simplesmente apoiada.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$	
V. m. teo.	0	0	0	
	1	1	1	
	1,0921	1,618	1,1756	
	2,6180	1,618	0,382	
	3,0777	1	-0,7265	
	3,2361	0	-1,2361	
	3,0777	-1	-0,7265	
	2,618	-1,618	0,382	
	1,9021	-1,618	1,1756	
	1	-1	1	
	0	0	0	
Erro relativo	0	0	0	[%]
	NA	NA	NA	
	0,0003	0,0072	0,006	[%]
	0,0009	0,0258	0,0613	[%]
	0,0016	0,0884	0,0597	[%]
	0,0024	0	0,0491	[%]
	0,0032	0,1801	0,0928	[%]
	0,004	0,1176	0,1632	[%]
	0,0046	0,099	0,0391	[%]

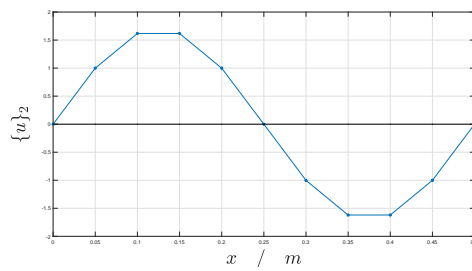
	0,0051	0,0918	0,024	[%]
	0	0	0	[%]
Média dos erros	0,0022	0,061	0,0495	[%]
Média err. total		0,0376		[%]

Novamente, o erro relativo obtido no cálculo dos vectores modais é extremamente reduzido, em que a média total dos erros é inferior a 0,04%.

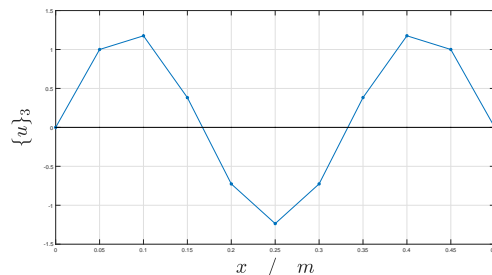
Tal como no caso anterior, as formas naturais de vibração são representativas do comportamento real da viga. Desta forma, na figura 5.21, pode-se observar as três primeiras formas naturais de vibração do sistema identificadas pelo algoritmo.



(a) Primeira forma natural.



(b) Segunda forma natural.



(c) Terceira forma natural.

Figura 5.21: Formas naturais de vibração identificadas do sistema viga simplesmente apoiada.

Na primeira forma natural de vibração da viga (5.21a), todos os GDL encontram-se em fase e o GDL com maior amplitude é a meio vão da viga. Em 5.21b, o GDL 6 (a meio da viga) é um nodo de vibração e os pares de GDL 3 e 4, e 5 e 6, apresentam a maior amplitude. No caso de um sistema contínuo, os pontos de maior amplitude de deslocamento encontram-se a meio da distância de cada um dos pares. Por último, pode-se ver em 5.21c a terceira forma natural de vibração, onde o GDL de maior amplitude é novamente a meio vão da viga, e o sistema apresenta dois nodos de vibração.

### 5.1.5 Veio com Condições Fronteira Livre-Livre

O último caso de estudo utilizado como validação do algoritmo é um sistema que contém um veio com as extremidades livres. Tal como nos casos anteriores, o primeiro passo passa por se definir as propriedades do sistema.

```

3  %% propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
4      %massa volumica em kilograma por metro cubico
5  -      ro=7860; %[kg/m^3]
6      %modulo de elasticidade transversal em Pascal
7  -      G=80e9; %[Pa]
8      %comprimento em metros
9  -      l=3; %[m]
10     %excitação por GDL
11 -      f=zeros(GDL,1); %[Nm]
12 -      f(GDL,1)=10;
13 -      f(6,1)=-10;

```

Figura 5.22: Propriedades do sistema do veio livre-livre.

Como se pode ver na figura 5.22, o material seleccionado para composição do veio é o aço. No caso de análise de vibração de um sistema à torção, por norma, os valores das frequências naturais são consideravelmente mais elevados do que um sistema com vibração transversal. Com esse facto em mente, seleccionou-se um veio com um comprimento bastante elevado (3 metros), com o intuito de reduzir os valores das frequências naturais. Quanto à excitação, aplicou-se um momento torsor no último GDL e outro, de sinal contrário, a meio do comprimento do veio (GDL 6).

Estando definidas as propriedades do sistema e da excitação, definiu-se as variáveis de medição conforme representado na figura 5.23.

```

5  %% Variaveis de medicacao
6  %Definir varaveis de medicacao (alterar para cada caso)
7      % seleccionar tipo de resposta
8      % 1 - exercício exemplo de 2 GDL
9      % 2 - exercício exemplo de 5 GDL
10     % 3 - exercício exemplo de viga fixa-livre - sem amortecimento
11     % 4 - exercício exemplo de viga apoio simples-apoio simples - sem amortecimento
12     % 5 - exercício exemplo de veio livre-livre - sem amortecimento
13 -     resp=5;
14     %sistema com amortecimento
15 -     amortecimento=0; %0 - sem amortecimento / 1 - com amortecimento
16     %Graus de liberdade a ser analisados
17 -     GDL=11;
18     %Frequencia maxima de interesse (em Hz)
19 -     fmax=2000;
20     %Precisao pretendida(sigma/m)
21 -     p=.2;
22     %Largura de banda efectiva (Be em Hz)
23 -     Be=5;
24     %Resolução da resposta mensurada - em funcao da freq de Nyquist (no mínimo 2)
25 -     ny=2;

```

Figura 5.23: Varáveis de medição para o sistema veio livre-livre.

Como já tinha sido referido, tendo em conta que as frequências naturais de um sistema sujeito a torção são consideravelmente elevadas, definiu-se a frequência máxima de interesse como 2000 Hz. O número de GDL selecionado é igual a 11 e a precisão é definida como 0,2. Tendo em conta a janela de frequências de interesse (0 a 2000 Hz), para o número de medições não se tornar demasiado elevado, definiu-se a largura de banda efectiva como 5 Hz. Apesar deste valor não ser muito reduzido, como os valores de frequência são consideravelmente elevados, a largura de banda selecionada é suficiente. Por último, a variável  $ny$  é igual a 2 por ser o valor mínimo aconselhável.

Com as variáveis de medição estabelecidas como indicado em 5.23, obteve-se o gráfico ANPSD representado na figura 5.24.

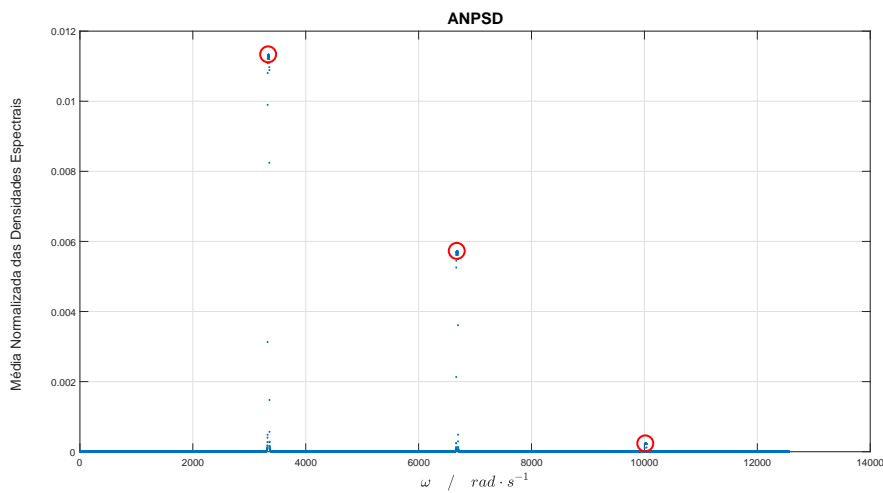


Figura 5.24: ANPSD para o sistema do veio livre-livre.

O gráfico ANPSD revela a presença de três picos referentes às frequências naturais de vibração, sendo que o terceiro é consideravelmente menor que os restantes. Pode-se ver na tabela 5.28, os valores obtidos experimentalmente para as frequências naturais.

Tabela 5.28: Frequências naturais obtidas experimentalmente para o sistema do veio livre-livre.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	
Frequências experimentais	3341,06	6682,12	10021,65	[rad/s]

Como se vê na tabela 5.28, os valores obtidos para as frequências naturais são muito superiores aos casos dos sistemas com a viga, sendo a frequência natural fundamental superior a 3000 rad/s. Comparando os valores experimentais com as frequências obtidas teoricamente, obtém-se os erros representados na tabela 5.29.

Tabela 5.29: Frequências naturais obtidas teoricamente e erro relativo para o sistema do veio livre-livre.

	$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	
Frequências teóricas	3340,89	6681,78	1022,67	[rad/s]
Erro relativo	0,0051	0,0051	0,0102	[%]
Média dos erros		0,0068		[%]

Os valores das frequências naturais obtidos por identificação por AMO são extremamente próximos dos valores calculados teoricamente, sendo a média dos erros inferior a 0,01%.

Quanto aos vectores modais, estão representados na tabela 5.30 os valores obtidos por identificação experimental.

Tabela 5.30: Vectores modais obtidos experimentalmente para o caso do veioLL.

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
V. m. exp.	1	1	1
	0,9511	0,809	0,5879
	0,809	0,309	-0,3087
	0,5878	-0,309	-0,9506
	0,309	-0,809	-0,8087
	0	-1	0
	-0,309	-0,809	0,8086
	-0,5878	-0,309	0,9506
	-0,809	0,309	0,3087
	-0,951	0,809	-0,5878
	-1	1	-0,9999

Comparando os valores da tabela 5.30 com os vectores modais obtidos pela via teórica, obtém-se os erros relativos indicados na tabela 5.31.

Tabela 5.31: Vectores modais obtidos teoricamente e erro relativo para o veio livre-livre.

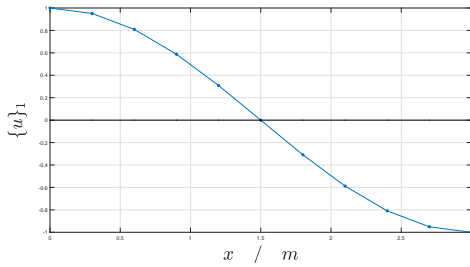
	$u_1$	$u_2$	$u_3$
V. m. teo.	1	1	1
	0,9511	0,809	0,5878
	0,809	0,309	-0,309
	0,5878	-0,309	-0,9511
	0,309	-0,809	-0,809
	0	-1	0
	-0,309	-0,809	0,809
	-0,5878	-0,309	0,9511
	-0,809	0,309	0,309
	-0,9511	0,809	-0,5878



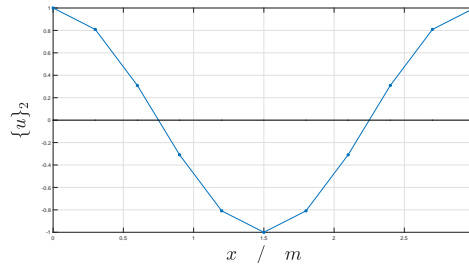
	-1	1	-1	
Erro relativo	NA	NA	NA	
	0,0002	0,0003	0,0189	[%]
	0,0008	0,0029	0,11	[%]
	0,0016	0,0054	0,0485	[%]
	0,0029	0,0027	0,0396	[%]
	0	0,0021	0	[%]
	0,0005	0,0014	0,0458	[%]
	0,0011	0,0012	0,0505	[%]
	0,0011	0,007	0,1038	[%]
	0,001	0,0044	0,0104	[%]
	0,0009	0,0041	0,0062	[%]
Média dos erros	0,001	0,0032	0,0434	[%]
Média err. total		0,0158		[%]

Novamente, o erro relativo presente no cálculo dos vectores modais é muito reduzido, sendo que a média total é inferior a 0,02%.

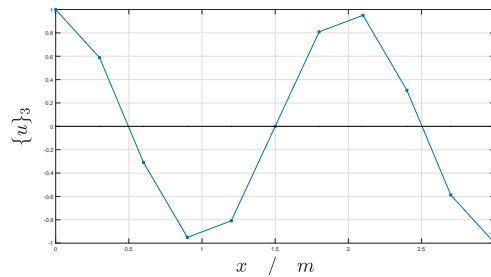
As figuras apresentadas em 5.25 são representativas das formas naturais de vibração obtidas por identificação experimental de um veio com condições fronteira livre-livre.



(a) Primeira forma natural.



(b) Segunda forma natural.



(c) Terceira forma natural.

Figura 5.25: Formas naturais de vibração identificadas do sistema veio livre-livre.

Como se pode ver em 5.25a, a primeira forma natural de vibração contém um nodo de vibração a meio vão do veio, e o primeiro e último GDL apresentam a maior amplitude de deslocamento sendo, contudo, em oposição de fase. Já no segundo modo de vibração

(figura 5.25b), as extremidades e o centro do veio estão sujeitos a uma maior amplitude deslocamento e apresenta dois nodos de vibração; um entre o 3 e 4 GDL e outro entre o 8 e 9 GDL. O terceiro modo de vibração apresenta três nodos de vibração e quatro GDL sujeitos a uma amplitude de deslocamento máxima.

### 5.1.6 Conclusões

Analisando os resultados obtidos ao longo do presente capítulo, pode-se retirar algumas conclusões sobre a metodologia utilizada e o algoritmo desenvolvido. Em primeiro lugar, analisando os resultados obtidos para os casos sem amortecimento, pode-se concluir que:

- As frequências naturais calculadas através do algoritmo utilizado apresentam valores muito próximos do que seria espectável, logo, o algoritmo desenvolvido é uma ferramenta útil na identificação desta propriedade modal.
- Os vectores modais calculados também apresentam erros relativos muito reduzidos. Novamente, o algoritmo também é uma ferramenta fiável na obtenção desta propriedade modal.
- Sistemas que apresentem o primeiro modo de vibração com uma amplitude de DE muito superior aos restantes devem ser analisados cuidadosamente. Se o valor de um pico de determinada frequência natural de vibração for demasiado reduzido, pode não ser detectado pelo algoritmo. No futuro, seria interessante incorporar no programa um método que analisasse o gráfico ANPSD e fosse retirando os picos mais elevados, de forma a dar mais relevância ao picos de menor valor.
- O programa é uma ferramenta interessante para a obtenção de resultados na forma gráfica. A visualização de certos resultados desta forma facilita o trabalho do utilizador na detecção de determinados erros ou no porquê de certos resultados serem diferentes do esperado. Adicionalmente, pode dar uma representação visual real das formas naturais de vibração.

Quanto a sistemas que apresentem amortecimento, pode-se concluir que:

- Caso o amortecimento seja reduzido, os valores das frequências naturais obtidos apresentam erros reduzidos. Apesar de serem superiores quando comparados com os casos sem amortecimento, esta propriedade modal pode ser determinada com relativa confiança.
- Os vectores modais obtidos experimentalmente apresentam erros consideráveis. Para além de ser necessário uma atenção especial por parte do utilizador para verificar se o sinal dos elementos dos vectores modais está correcto, os próprios valores dos vectores modais apresentam erros que não são desprezáveis. Não é aconselhável a utilização do presente método para a obtenção desta propriedade modal para sistemas que apresentem razões de amortecimento superiores a 5%.

Assim sendo, pode-se concluir de forma geral que:

- É seguro utilizar o algoritmo, desde que sejam cumpridas certas condições do sistema a ser testado. Nomeadamente, sistemas sem amortecimento ou com amortecimento muito reduzido, sendo que mesmo com amortecimento reduzido, não é muito fiável

o cálculo dos vectores modais; O sistema deve apresentar modos de vibração bem separados para evitar que haja sobreposição dos mesmo, sendo que este factor é muito mais relevante em sistemas que apresentem amortecimento.

- A excitação deve ser aplicada em vários GDL com intensidades e sinais diferentes, de forma a garantir que todos os modos de vibração sejam devidamente excitados. Nos casos de estudo em questão, aplicando as forças em determinados GDL e com diferentes intensidades, produz valores diferentes, sendo que certos modos de vibração podem não ser excitados devidamente. Este factor toma maior relevo nos casos utilizados porque é necessário definir a excitação, sendo que esta é uma excitação transiente de valor constante; a excitação foi definida desta forma com o intuito de não complicar em demasia a simulação da resposta do sistema. Num caso real, como a excitação deverá ser verdadeiramente aleatória, este problema não se deve levantar.
- Como na maioria das actividades experimentais, a experiência do utilizador é um factor a ter em conta. Saber definir as variáveis de medição de forma adequada para cada caso, pode ser a diferença entre a obtenção de resultados excelentes ou resultados inutilizáveis.

Desta forma, conclui-se que o algoritmo está validado desde que sejam cumpridos certos requisitos.

## 5.2 Simulação de Resposta Real

Tendo o algoritmo validado para sistemas que apresentem certas condições de propriedades modais, é necessário validar o mesmo em situações de funcionamento reais. Todos os exemplos descritos até ao momento, utilizam respostas do sistema perfeitas, isto é, sem variações nos valores medidos devido a ruído. Num caso real, a resposta obtida não será desprovida de flutuações inerentes ao processo de medição, provocando um erro susceptível a qualquer experiência prática. Com esse intuito, foi incluída a possibilidade de se adicionar ruído ao sinal da resposta.

O ruído selecionado é um ruído gaussiano branco. Gaussiano, porque é um ruído estatístico, cuja função de densidade de probabilidade é igual à da distribuição normal; branco, porque apresenta intensidades iguais a diferentes frequências, logo, a sua densidade espectral é constante.

Assim sendo, como se pode ver na figura 5.26, acrescentou-se duas variáveis à secção de variáveis de medição.

```

5  %% Variaveis de medicao
6  %Definir varaveis de medicao (alterar para cada caso)
7      % selecionar tipo de resposta
8      % 1 - exercício exemplo de 2 GDL
9      % 2 - exercício exemplo de 5 GDL
10     % 3 - exercício exemplo de viga fixa-livre - sem amortecimento
11     % 4 - exercício exemplo de viga apoio simples-apoio simples - sem amortecimento
12     % 5 - exercício exemplo de veio livre-livre - sem amortecimento
13 -   resp=1;
14     %sistema com amortecimento
15 -   amortecimento=0; %0 - sem amortecimento / 1 - com amortecimento
16     %ruído na resposta mensurada
17 -   ruid=1; %0 - sem ruído / 1 - com ruído
18 -   rr=30; %rácio sinal/ruído em dB- quanto menor, mais ruído na resposta
19     %Graus de liberdade a ser analisados

```

Figura 5.26: Variáveis de medição de ruído.

As variáveis adicionadas são:

- ruid* Define se a resposta do sistema contém ruído ou não. Sendo igual a 1, contém ruído;
- rr* Rácio do sinal sobre o ruído em dB. Quanto menor for este valor, maior será o ruído presente na resposta.

Segundo [Brincker and Ventura \[2015\]](#), o valor mínimo aceitável para o rácio entre sinal e ruído em testes de AMO é 30 – 40 dB.

Com o intuito de validar o programa desenvolvido para situações de funcionamento reais, adicionou-se ruído aos sinais de resposta de dois dos casos de estudo referidos anteriormente, e analisou-se a sua influência nos resultados obtidos.

### 5.2.1 2GDL sem amortecimento

Iniciando o estudo da influência do ruído nas medições com o caso mais simples, o de dois GDL, definiu-se o rácio entre sinal e resposta como 30 dB (valor mínimo aceitável).

Comparando as respostas obtidas com a presença de ruído com as sem ruído (figura 5.27), verifica-se que ocorrem ligeiras flutuações nas zonas de maior ou menor amplitude de resposta, mas nada de muito significativo.

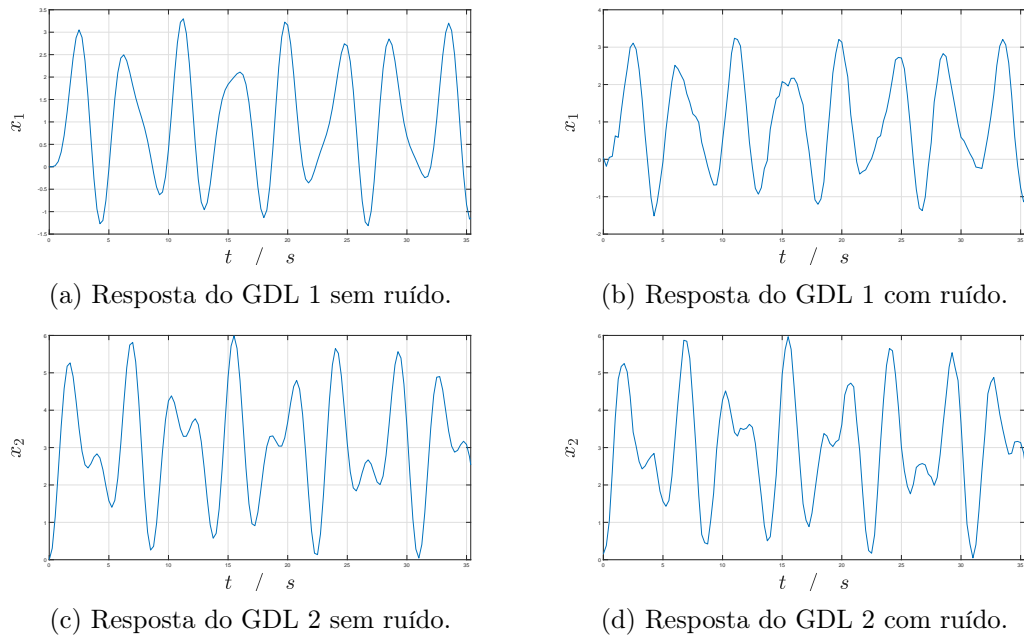


Figura 5.27: Comparação das respostas com e sem a presença de ruído.

Analisando os resultados obtidos, verifica-se que os valores das frequências naturais (tabela 5.32) são iguais aos valores obtidos para o estudo sem a presença de ruído.

Tabela 5.32: Frequências naturais e erro relativo para o caso de 2GDL com ruído de medição.

	$\omega_1$	$\omega_2$	
Frequências experimentais	1,4144	2,2351	[rad/s]
Frequências teóricas	1,4142	2,2361	[rad/s]
Erro relativo	0,0113	0,0443	[%]
Média dos erros	0,0278		[%]

Quanto aos vectores modais (tabela 5.33), ocorre uma ligeira variação de valores, mas nada de muito significativo.

Assim sendo, para valores de ruído dentro do aceitável para AMO, continua-se a obter propriedades modais com elevada precisão.

Tabela 5.33: Vectores modais para o caso de 2GDL com ruído de medição.

	$u_1$	$u_2$	
Vectores modais experimentais	1	1	
	1,0001	-1,9967	
Vectores modais teóricos	1	1	
	1	-2	
Erro relativo	NA	NA	
	0,0069	0,1633	[%]
Média dos erros	0,0851		[%]

Com o intuito de se estudar a influência do ruído nos resultados, decidiu-se aumentar o ruído na resposta para valores superiores ao aconselhável. Aumentando o rácio entre sinal e resposta de 30 dB para 10 dB, verificou-se que o algoritmo detectava mais frequências naturais do que o suposto. Apesar do gráfico ANPSD (figura 5.28), apenas apresentar dois picos de amplitude, o algoritmo detecta dezenas de frequências naturais. Tal facto ocorre devido à sensibilidade do programa em detectar variações no gráfico ANPSD. Como já foi referido, os picos são detectados a partir de um balizamento de duas condições; valor mínimo e espaçamento mínimo. O valor mínimo está definido como uma ordem de grandeza cinco vezes inferior ao valor máximo. Tendo em conta a flutuação de resultados devido ao ruído presente na resposta, esta condição é demasiado relaxada. Aumentando esse valor mínimo para uma ordem de grandeza duas vezes inferior ao valor máximo (ou seja, 1% do valor máximo), para além de se obter as duas frequências naturais de vibração como esperado, obtém-se os valores de erro relativo representados na tabela 5.34.

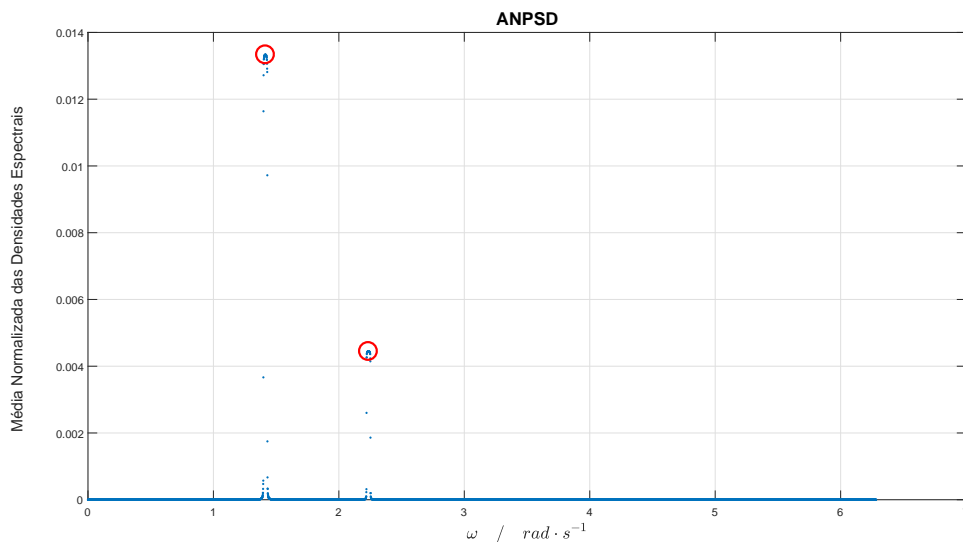


Figura 5.28: ANPSD para o caso de estudo de 2GDL com ruído.

Tabela 5.34: Erro relativo para o caso de 2GDL com ruído de medição.

Frequências naturais			
Erro relativo	0,0113	0,0243	[%]
Média dos erros	0,0178		[%]
Vectores Modais			
Erro relativo	NA	NA	
	0,6423	3,2069	[%]
Média dos erros	1,9246		[%]

Como se pode ver na tabela 5.34, mesmo com um rácio de ruído muito superior ao aconselhável, as frequências naturais apresentam valores de erro relativo inferiores a 0,03%. Já os vectores modais, apesar de conterem erros mais consideráveis, apresentam um média de erros inferior a 2%. Tendo em conta o ruído excessivo presente na medição, são valores de erro algo aceitáveis.

Levando o caso de estudo ao extremo, e definindo o rácio de ruído como 1, obtém-se as respostas representadas na figura 5.29.

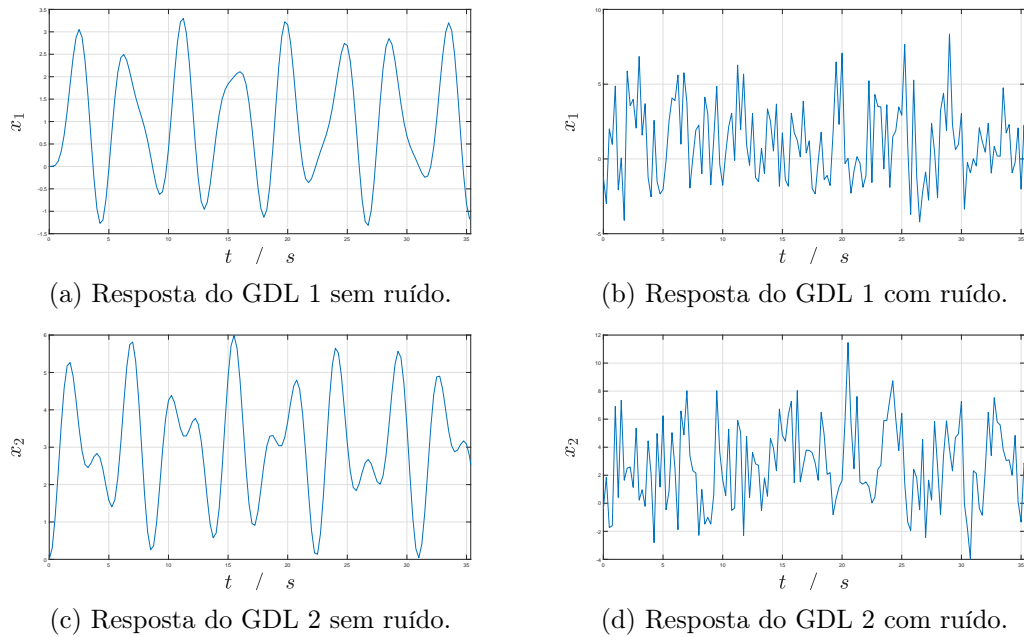


Figura 5.29: Comparação das respostas com ruído excessivo.

Comparando 5.29a e 5.29c com 5.29b e 5.29d, verifica-se que o ruído deturpou consideravelmente a resposta medida. Mesmo assim, obteve-se os erros relativos representados na tabela 5.35.



Tabela 5.35: Erro relativo para o caso de 2GDL com ruído excessivo.

Frequências naturais			
Erro relativo	0,2283	0,2645	[%]
Média dos erros	0,2464		[%]
Vectores Modais			
Erro relativo	NA	NA	
	4,9531	1,9212	[%]
Média dos erros	3,4372		[%]

Tendo em conta a quantidade de ruído presente na medição, os valores de erro relativo representados em 5.35 são perfeitamente aceitáveis. As frequências naturais apresentam erros inferiores a 0,3%, enquanto os vectores modais apresentam um erro máximo de 5%.

### 5.2.2 Viga Simplesmente Apoiada

Continuando a análise da influência do ruído num caso mais representativo de um sistema real (viga simplesmente apoiada), e voltando a definir os níveis de ruído para um valor aceitável em AMO (30 dB), verificou-se que, em certos casos, o programa continua algo sensível às flutuações provocadas na resposta pelo ruído. Ou seja, ocasionalmente detecta certas frequências como frequências naturais de vibração quando não o são. Adicionalmente, como se pode ver na figura 5.30, os picos referentes à segunda e terceira frequência natural são consideravelmente menores que o correspondente à frequência fundamental de vibração.

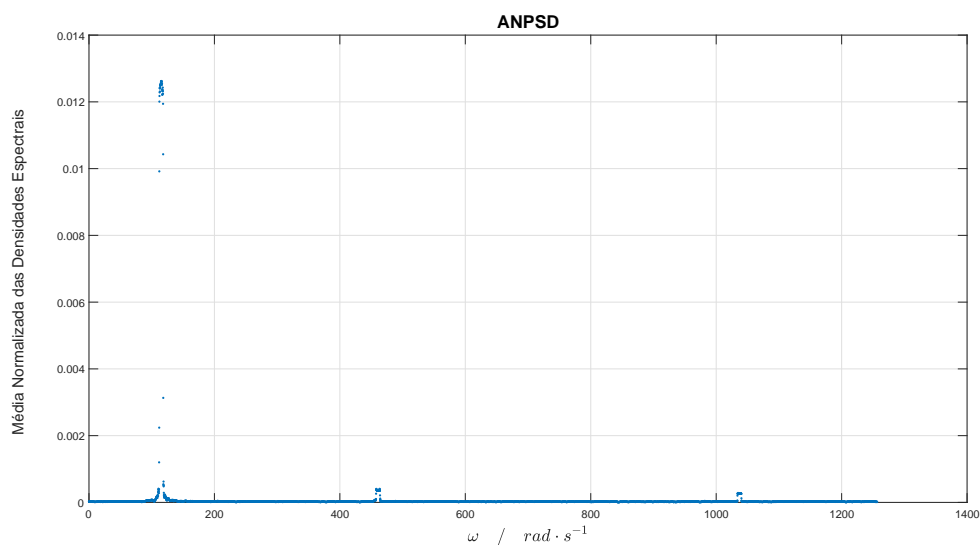


Figura 5.30: ANPSD para o sistema da viga simplesmente apoiada com ruído de medição.

## 5. Resultados

Com o intuito de tornar os picos de amplitude correspondentes às frequências naturais de vibração mais proeminentes, alterou-se a excitação aplicada no sistema conforme indicado na figura 5.31. De notar que, em condições reais de funcionamento, não deve surgir o problema em questão. Sendo que a excitação deverá ser aleatória, todos os modos de vibração tendem a ser devidamente excitados. Nos casos de estudo utilizados, como já foi referido, a excitação é transiente e constante, logo, é mais restritiva nos modos de vibração que excita.

```
15 | %excitação por GDL  
16 | f=zeros(GDL,1); %[N]  
17 | f(3,1)=-100;  
18 | f(4,1)=50;  
19 | f(6,1)=100;  
20 | f(9,1)=-100;  
21 | f(8,1)=-50;
```

Figura 5.31: Nova excitação aplicada ao sistema da viga simplesmente apoiada.

Alterando a excitação de forma a favorecer o aumento de amplitude para o segundo e terceiro modo de vibração, obtém-se o gráfico ANPSD representado na figura 5.32.

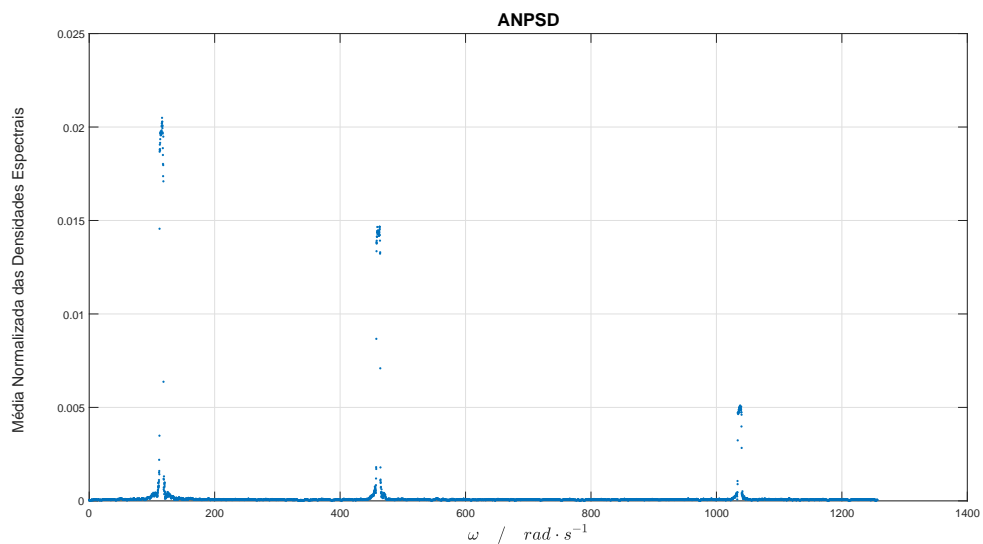


Figura 5.32: ANPSD para o sistema da viga simplesmente apoiada com nova excitação.

Com o aumento do valor da amplitude dos picos do gráfico ANPSD, as flutuações devido a ruído deixam de ser detectadas de forma errónea como frequências naturais de vibração. Assim sendo, o cálculo das propriedades modais apresenta os erros relativos indicados na tabela 5.36.

Tabela 5.36: Erro relativo para o sistema da viga simplesmente apoiada com ruído na medição.

Frequências naturais				
Erro relativo	1,4803	0,4169	0,2948	[%]
Média dos erros	0,7307			[%]
Vectores Modais				
Erro relativo	0	0	0	[%]
	NA	NA	NA	
	0,135	0,236	0,4248	[%]
	0,0895	0,2622	0,8673	[%]
	0,1544	0,4861	0,3013	[%]
	0,1302	0	0,5418	[%]
	0,1435	0,1469	0,4040	[%]
	0,1097	0,1772	0,4471	[%]
	0,1156	0,1339	0,5289	[%]
	0,0514	0,1233	0,1388	[%]
	0	0	0	[%]
Média dos erros	0,0929	0,1566	0,3654	[%]
Total média dos erros	0,205			[%]

Como se pode ver na tabela 5.36, o erro relativo referente à frequência natural fundamental é ligeiramente superior ao esperado. Mesmo não sendo um erro demasiado elevado, este aumento surge devido à alteração da excitação que favorece as amplitudes do segundo e do terceiro modo natural de vibração. Novamente, este problema não deve surgir com condições reais de funcionamento com excitações aleatórias. Mesmo assim, as restantes frequências naturais e os vectores modais apresentam erros relativos muito reduzidos.

Convém referir que esta manipulação das condições ocorre para um caso em que o ruído presente é igual ao valor mínimo aceitável. Caso fosse menor, poderia não ser necessário provocar o aumento das amplitudes dos picos referentes aos modos naturais de vibração. Ou seja, em condições não ideais de ruído presente na medição da resposta, é necessário uma atenção extra para garantir que todos os modos de vibração são devidamente excitados.

### 5.2.3 Conclusões

Analisando a influência do ruído na resposta medida, pode-se concluir que:

- Mantendo o rácio entre sinal e ruído superior aos valores mínimos aconselháveis, o algoritmo apresenta erros relativos ligeiramente superiores, mas continua a calcular as propriedades modais com precisão muito aceitável.
- Mesmo com ruído de medição superior ao aconselhável, verifica-se que o programa detecta as frequências naturais de vibração com precisão. Quanto aos vectores modais, são mais susceptíveis à presença de ruído. Caso o ruído seja inferior ao aconselhável, os vectores modais são calculados com a precisão esperada; caso o ruído seja muito elevado, os vectores obtidos não são extremamente precisos, mas apresentam bons valores se se considerar um coeficiente de segurança. Mesmo que os seus valores não sejam exactos, as formas naturais de vibração serão próximas do comportomanto real da estrutura.
- A presença de ruído na resposta influencia de forma mais pronunciada sistemas que apresentem excitações de intensidade reduzida ou que não excitam devidamente todos os modos de vibração. Ou seja, quanto menor for a intensidade da excitação, menor tem de ser o ruído presente na resposta.

Assim sendo, conclui-se que o programa desenvolvido se encontra validado para condições reais de funcionamento, desde que haja cuidado por parte do utilizador em garantir que as condições necessárias de propriedades do sistema e excitação são cumpridas.

### Conclusão

---

O capítulo final da presente dissertação apresenta as ilações tiradas ao longo do trabalho realizado, bem como sugestões para trabalhos futuros.

#### 6.1 Conclusões

O objectivo do presente trabalho era o de desenvolver, implementar e validar um algoritmo baseado num método de Análise Modal Operacional que fosse capaz de identificar os parâmetros modais de um determinado sistema mecânico. Tendo em conta os resultados obtidos nos processos de simulação dos casos de estudo seleccionados, pode-se concluir que:

- O algoritmo desenvolvido identifica as propriedades modais de um sistema de forma precisa, desde que sejam cumpridos certos requisitos, sendo estes:
  - O sistema não contém amortecimento, ou contém amortecimento bastante reduzido ( $\xi < 5\%$ ). Para sistemas sem amortecimento, ambas as propriedades modais calculadas pelo programa apresentam valores de erro muito reduzido. Caso haja amortecimento, as frequências naturais de vibração continuam a apresentar erros reduzidos, mas os vectores modais revelam um erro crescente com o aumento do amortecimento. Apesar de se obter resultados com maior precisão caso não haja amortecimento, desde que sejam tomadas determinadas precauções por parte do utilizador, o sistema é capaz de determinar as propriedades modais com precisão, desde que o segundo requisito também seja cumprido;
  - O sistema tem de apresentar modos de vibração bem separados, i.e., na vizinhança da ressonância, a resposta tem de ser dominada por um só modo de vibração. Caso haja interferência entre modos, tanto os valores das frequências naturais como dos vectores modais são fortemente deturpados. Para verificar se os modos naturais de vibração são bem espaçados, para além de se poder verificar com o cálculo da largura de banda do modo, pode-se ver visualmente se ocorre interferência através do gráfico da ANPSD;

- A ANPSD revelou-se uma ferramenta extremamente útil, por reduzir de forma significativa o número de gráficos a analisar para se obter as frequências naturais de vibração, especialmente para casos de estudo onde o número de GDL é elevado;
- Sistemas que apresentem modos de vibração com amplitude muito elevada no gráfico ANPSD têm de ser analisados com um cuidado extra. Se as flutuações provocadas pelos restantes modos de vibração forem demasiado reduzidas, o programa pode não as identificar. Caso seja necessário, pode-se alterar a sensibilidade do algoritmo para detectar os picos de amplitude, mas é necessário algum cuidado para o programa não identificar frequências como frequências naturais do sistema quando não o são;
- O algoritmo desenvolvido é sensível ao tipo de excitação aplicada ao sistema. Para além de se obter valores ligeiramente diferentes consoante a excitação aplicada, é necessário garantir que todos os modos de vibração são devidamente excitados. Caso contrário, o programa pode não identificar certos modos de vibração, ou obter resultados com erros consideráveis, se determinado modo apresentar uma influência demasiado reduzida no gráfico ANPSD. Logo, a excitação deve ser aplicada em vários GDL com intensidades e sinais diferentes, de forma a garantir que todos os modos de vibração sejam igualmente excitados.
- A visualização de resultados na forma gráfica é uma ferramenta útil do programa desenvolvido. Para além de facilitar a leitura de dados em certos casos, é um ferramenta que facilita o trabalho do utilizador na detecção de erros, tornando todo o processo muito mais expedito.
- Caso se mantenha o rácio entre sinal e ruído superior aos valores mínimos aconselháveis, as propriedades modais continuam a ser identificadas com bastante precisão. Apesar do erro relativo aumentar ligeiramente, mantém-se em valores muito aceitáveis. Mesmo para valores de ruído superiores ao aconselhável, caso a excitação tenha intensidade suficiente para provocar uma amplitude resposta elevada, a precisão do algoritmo continua a ser aceitável. Assim sendo, a quantidade de ruído aceitável está directamente relacionada com a intensidade da resposta. Para sistema que apresentem excitações de intensidade reduzida ou que não excitam devidamente todos os modos de vibração, a presença de ruído tem de ser ainda mais controlada.
- Como na maioria das actividades experimentais, a experiência do utilizador é um factor a ter em conta. Saber definir as variáveis de medição de forma adequada para cada caso, pode ser a diferença entre a obtenção de resultados excelentes ou resultados inutilizáveis.

Desta forma, conclui-se que o programa desenvolvido se encontra validado para condições reais de funcionamento, desde que haja cuidado por parte do utilizador em garantir que as condições necessárias de propriedades do sistema e excitação são cumpridas.

## 6.2 Trabalhos Futuros

O trabalho realizado ao longo da presente dissertação revelou alguns pontos susceptíveis a melhoria. Para melhorar nesses aspectos, sugerem-se duas vias: melhorar o algoritmo desenvolvido e/ou o desenvolvimento de um algoritmo de AMO baseado noutro método.

Quanto às melhorias do programa desenvolvido sugere-se os seguintes pontos:

- Quando a resposta de um sistema apresenta no gráfico de DE um modo de vibração com amplitude muito elevada, os restantes picos podem passar despercebidos pelo processo de identificação do algoritmo. Para contornar este problema, sugere-se a incorporação no programa de um método de análise do gráfico ANPSD que fosse retirando os picos mais elevados, de forma a dar mais relevância aos restantes modos. Este processo teria de ser desenvolvido com algum cuidado, para não chegar ao extremo de detectar flutuações normais à medição como frequências naturais do sistema;
- Testar o algoritmo em condições reais de funcionamento. O programa desenvolvido demonstra bons resultados nas simulações das condições reais de teste, mas seria benéfico para testar a robustez do mesmo, a realização de uma experiência prática com um sistema real para verificar lacunas ou pontos a melhorar do algoritmo;
- Verificar a viabilidade de inserir no programa um método de identificação do amortecimento do sistema. O algoritmo desenvolvido não inclui a identificação do amortecimento por dois motivos: Primeiro, o algoritmo é mais preciso quando o sistema não apresenta amortecimento; segundo, porque os métodos de identificação de amortecimento são considerados pouco precisos. Tendo em conta que o algoritmo apresenta resultados aceitáveis para amortecimentos reduzidos ( $\xi < 5\%$ ) desde que os modos sejam bem espaçados, poderia-se verificar se os métodos de identificação de amortecimento seriam capazes de produzir valores aceitáveis para esses casos.

Também seria interessante o desenvolvimento de outro algoritmo baseado noutro método de identificação por AMO. Para o efeito, sugerem-se as seguintes opções:

- Um método no domínio do tempo. Tendo em conta que o algoritmo desenvolvido é baseado num método no domínio da frequência, seria interessante utilizar um método no domínio do tempo para comparar resultados. Adicionalmente, seria benéfico para pôr em prática os conceitos aprendidos com maior relevância para um método de identificação no domínio do tempo, algo que o presente trabalho não pode fazer.
- Um método com maior robustez. Considerando que o método utilizado é sensível a sistemas que apresentem amortecimento e modos de vibração pouco espaçados, seria interessante o desenvolvimento de um algoritmo baseado num método que detectasse a presença de modos de vibração sobrepostos e permitisse a inclusão de amortecimento com pouca (ou nenhuma) consequência nos resultados.





---

## Referências

---

- D.J. Ewins. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press LTD., 2nd edition edition, 2000.
- Jacek Grosel, Wojciech Sawicki, and Wojciech Pakos. Application of classical and operational modal analysis for examination of engineering structures. *Procedia Engineering*, 91:136 – 141, 2014.
- W. Heylen, S. Lammens, and P. Sas. *Modal Analysis Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, 1998.
- N. Maia and J. Silva. *Theoretical and Experimental Modal Analysis*. Research Studies Press LTD., 1997.
- J. Dias Rodrigues. *Apontamentos de Vibrações de Sistemas Mecânicos*. Faculdade de Engenharia da U.PORTO, PORTO, 2014 edition, 2014.
- J. Dias Rodrigues. *Apontamentos de Dinâmica de Máquinas*. Faculdade de Engenharia da U.PORTO, PORTO, 2016 edition, 2016.
- R. Brincker and C. Ventura. *Introduction to Operational Modal Analysis*. John Wiley and Sons, 1 edition, 2015.
- C. Rainieri and G. Fabbrocino. *Operational Modal Analysis of Civil Engineering Structures: An Introduction and Guide for Applications*. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2014.
- D. E. Newland. *An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*. Dover Publications, 3rd edition edition, 2005.
- W.T. Thomson and M.D. Dahleh. *Theory of vibration with applications*. Prentice Hall, 5th edition edition, 1997.
- A. Papoulis and Pillai S.U. *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, 4th edition edition, 2002.
- A. Brandt. *Noise and Vibration Analysis: Signal Analysis and Experimental Procedures*. Wiley, 1st edition edition, 2011.
- S. R. Ibrahim and E. C. Mikulcik. A method for direct identification of vibration parameters from the free response. *The Shock and Vibration Bulletin*, 47:183 – 196, 1977.
- Harvard Vold, John Kundrat, G. Thomas Rocklin, and Richard Russell. A multi-input modal estimation algorithm for mini-computers. In *SAE Technical Paper*. SAE International, 1982.

- J.N. Juang and Richard Pappa. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. 8, 11 1985.
- P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace identification for linear systems. Theory, implementation, application*, volume xiv. KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, 1996.
- B. Brincker, L. Zhang, and P. Andersen. *Modal Identification from Ambient Responses using Frequency Domain Decomposition*, pages 625–630. 2000.
- S. Au. *Operational Modal Analysis. Modeling, Bayesian Inference, Uncertainty Laws*. Springer, 2017.
- A. J. Felber. *Development of a hybrid bridge evaluation system*. PhD thesis, 1994.
- I. Okauchi, T. Miyata, M. Tatsumi, and R. Kiyota. Dynamic field tests and studies on vibration characteristics of long span suspension bridges. *JSCE journal of Structural Engineering and Earthquake Engineering*, 9(1):89–100, 1992.
- B. Peeters. *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*. PhD thesis, 2000.
- C. Rainieri, G. Fabbrocino, and E. Cosenza. Some remarks on experimental estimation of damping for seismic design of civil constructions. *Shock and Vibration*, 17(4-5):383–395, 2010.
- S.R. Ibrahim, J.C. Asmussen, and R. Brincker. Modal parameter identification from responses of general unknown random inputs. Technical report, Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, 1995.

## Apêndice A

---

### Código do Algoritmo Desenvolvido

---

#### Conteúdo

- Variáveis de medição
- Pré-processamento
- Densidades Espectrais
- Frequências Naturais
- Vectores Modais
- Resultados

```
tic  
clearvars  
close all  
clc
```

#### Variáveis de medição

```
%Definir varaveis de medicao (alterar para cada caso)  
% selecionar tipo de resposta  
% 1 - exercício exemplo de 2 GDL  
% 2 - exercício exemplo de 5 GDL  
% 3 - exercício exemplo de viga fixa-livre - sem amortecimento  
% 4 - exercício exemplo de viga apoio simples-apoio simples - sem amortecimento  
% 5 - exercício exemplo de veio livre-livre - sem amortecimento  
resp=1;  
%sistema com amortecimento  
amortecimento=0; %0 - sem amortecimento / 1 - com amortecimento  
%ruído na resposta mensurada  
ruid=0; %0 - sem ruído / 1 - com ruído  
rr=30; %rácio sinal/ruído em dB- quanto menor, mais ruído na resposta  
%Graus de liberdade a ser analisados  
GDL=2;
```

```
%Frequencia maxima de interesse (em Hz)
fmax=1;
%Precisao pretendida(sigma/m)
p=.2;
%Largura de banda efectiva (Be em Hz)
Be=.005;
%Resolução da resposta mensurada - em funcao da freq de Nyquist (no mínimo 2)
ny=2;

%Variaveis definidas automaticamente
%passo (dt em s)
dt=1/(2*ny*fmax);
%tempo de medicao (T em segundos)
T=(1/p^2)/Be;
%numero de medicoes N
N=T/dt;
N=round(N);
%numero de zeros L
n=log(N)/log(2); %determina o n inteiro mais proximo
n=ceil(n); %novo n
L=(2^n)-N; %L zeros no sinal
%espectros adjacentes
ea=Be*T*((N+L)/N);
ea=ceil(ea);
nea=(ea-1)/2;
nea=ceil(nea);
%serie discreta
t=0:dt:T;
```

## Pré-processamento

Sinal teorico

```
if resp==1
[x, wt, ut]=ex2GDL(GDL,t,amortecimento);
elseif resp==2
[x, wt, ut]=ex5GDL(GDL,t,amortecimento);
elseif resp==3
[x, wt, ut, xv]=vigaFL(GDL,t,fmax);
elseif resp==4
[x, wt, ut, xv]=vigaAS(GDL,t,fmax);
elseif resp==5
[x, wt, ut, xv]=veioLL(GDL,t,fmax);
else
error('Tipo de resposta selecionada não existe')
end
%ruído
```

---

```

if ruid ==1
x=awgn(x,rr,'measured');
end
%Tratamento do sinal
%media dos sinais
mx=zeros(GDL,1);
for p=1:GDL
mx(p,1)=mean(x(p,:));
end
%novas sequencias de sinais com media nula e L zeros
X=zeros(2^n,GDL);
%ciclo dos novos sinais
for p=1:GDL
for q=1:N
X(q,p)=x(p,q)-mx(p,1); %matriz com os GDL em colunas
end
end
%FFT - Fast Fourier Transform
Y=fft(X);

```

## Densidades Espectrais

```

%Calculo da matriz DE
S=zeros(size(Y,2),size(Y,2),size(Y,1));
for p=1:size(Y,2)
for q=1:size(Y,2)
for r=1:size(Y,1)
S(p,q,r)=conj(Y(r,p))*Y(r,q);
end
end
end
%Tratamento dos Espectros
Tl=(N+L-1)*dt; %tempo de medicao com os zeros
t=0:dt:Tl; %novo t com os zeros
S=Tl/(2*pi)*S; %espectro continuo
%Espectro entre -N+L/2 e N+L/2
k1=-(L+N)/2:(L+N)/2-1; %passo entre as freq de Nyquist
wk=2*pi*k1/Tl; %passo em rad/s
G=zeros(size(S));
G(1:GDL,1:GDL,1:2^n/2)=S(1:GDL,1:GDL,2^n/2+1:2^n);
G(1:GDL,1:GDL,2^n/2+1:2^n)=S(1:GDL,1:GDL,1:2^n/2);
%Factor de correcao para os zeros adicionados
G=((N+L)/N)*G;
%Alisamento final - média com os espectros adjacentes
GF=G;
for p=1:GDL
for q=1:GDL
for r=2^n/2+1:2^n-neq

```

```
GF(p,q,r)=(1/ea)*sum(G(p,q,r-nea:r+nea));
end
end
end
```

## Frequências Naturais

```
%Average Normalized Power Spectral Density
%Normalized Power Spectral Density
SPSD=zeros(size(GF,1)); %soma das DE para maior eficiencia no calculo das NPSD
for p=1:size(GF,1)
for q=1:size(GF,2)
SPSD(p,q)=sum(GF(p,q,:));
end
end
%verificar se SPSD contem zeros
for p=1:size(GF,1)
for q=1:size(GF,2)
if SPSD(p,q)==0
SPSD(p,q)=1;
end
end
end
NPSD=zeros(size(GF));
for p=1:size(GF,1)
for q=1:size(GF,2)
for r=1:size(GF,3)
NPSD(p,q,r)=GF(p,q,r)/SPSD(p,q);
end
end
end
%Average Normalized Power Spectral Density
ANPSD=1/(size(GF,1))^2*sum(sum(abs(NPSD)));

%Frequencias Naturais
peak=findpeaks(ANPSD(1,2^n/2+1:2^n)); %picos
[peak,loc]=findpeaks(ANPSD(1,2^n/2+1:2^n-(2^n/(2*ny))), 'MinPeakProminence',max(peak)*1
wi=wk(1,2^n/2+loc); %frequencias dos picos
```

## Vectores Modais

```
%calculo dos vectores modais pelas DE
%DE para as ressonancias
U=abs(GF(:, :, 2^n/2+1+loc)); %DE em valor absoluto
ang=angle(GF(:, :, 2^n/2+1+loc))*180/pi; %fase dos GDL
%vectores modais
```

---

```

u=zeros(GDL,size(wi,2)); %inicializacao
p=1; q=1; r=1; %contadores
while p<size(wi,2)+1
Umax=max(max(U(:,r,p))); %valor máximo
if sum(any(abs(ang(:,r,p))>170))>=1 %verificar se os GDL estao todos em fase
if U(q,r,p)>Umax*10^-2 %garantir que o valor escolhido tem um valor minimo
if any(abs(ang(:,r,p))>170)
u(:,p)=U(:,r,p)/U(q,r,p);
if abs(ang(q,r,p))<170
for s=q+1:GDL %determinar o sinal do elemento
if abs(ang(s,r,p))>165
u(s,p)=-u(s,p);
end
end
else
for s=q+1:GDL %determinar o sinal do elemento
if abs(ang(s,r,p))<165
u(s,p)=-u(s,p);
end
end
end
p=p+1; r=1; q=1;
else
q=1;
r=r+1;
end
elseif q==GDL %caso não haja um valor minimo passar para a proxima coluna
q=1;
r=r+1;
else %caso não haja um valor minimo passar para a proxima linha
q=q+1;
end
else
if U(q,r,p)>Umax*10^-2 %garantir que o valor escolhido tem um valor minimo
u(:,p)=U(:,r,p)/U(q,r,p);
p=p+1; r=1; q=1;
elseif q==GDL %caso não haja um valor minimo passar para a proxima coluna
q=1;
r=r+1;
else %caso não haja um valor minimo passar para a proxima linha
q=q+1;
end
end
end
%eliminar valores residuais
for p=1:GDL
for q=1:size(wi,2)
if abs(u(p,q))<.01
u(p,q)=0;

```

```
end
end
end
```

## Resultados

```
%Selecionar quais os resultados que aparecem na command window:
%Frequências naturais calculadas experimentalmente
fex=0; %0- nao /1 - sim
%Vectores modais calculados experimentalmente
vex=0; %0- nao /1 - sim
%Frequências naturais calculadas teoricamente
ft=0; %0- nao /1 - sim
%Vectores modais calculados teoricamente
vt=0; %0- nao /1 - sim

%Selecionar representação gráfica
%Grafico ANPSD
ganpsd=0; %0- nao /1 - sim
%Formas naturais calculadas experimentalmente
fne=0; %0- nao /1 - sim
%se sim, de qual/quais modos
fneg=[1 2 3]; %indicar o numero dos modos com um espaço entre si
%Formas naturais calculadas teoricamente
fnt=0; %0- nao /1 - sim
%se sim, de qual/quais modos
fntg=[1 2 3]; %indicar o numero dos modos com um espaço entre si
%Resposta do sistema
rs=0; %0- nao /1 - sim
%se sim, de qual/quais GDL
rsg=[1 2]; %indicar o numero dos GDL com um espaço entre si

%Resposta na command window
%Frequências Naturais calculadas experimentalmente
if fex==1
disp('Frequências Naturais calculadas experimentalmente [rad/s]:')
disp(wi)
end
%Frequências Naturais calculadas teoricamente
if ft==1
disp('Frequências Naturais calculadas teoricamente [rad/s]:')
disp(wt)
end
%Vectores modais calculados experimentalmente
if vex==1
disp('Vectores modais calculados experimentalmente:')
disp(u)
end
```



```
%Vetores modais calculados teoricamente
if vt==1
disp('Vetores modais calculados teoricamente:')
disp(ut)
end

%Representacao grafica
p=1;%contador
%Grafico ANPSD
if ganpsd==1
figure(p)
p=p+1;
plot(wk(1,2^n/2+1:2^n-(2^n/(2*ny))),abs(ANPSD(1,2^n/2+1:2^n-(2^n/(2*ny)))),'.')
hold on
plot(wk(1,2^n/2+loc),peak,'o','MarkerSize',16,'color','r','LineWidth',2)
grid on
title('ANPSD', 'fontsize',16)
xl=xlabel('$\omega \quad / \quad \text{rad}\cdot \text{s}^{-1}$','interpreter','latex','fontsize',16);
yl=ylabel('Média Normalizada das Densidades Espectrais','fontsize',14);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.07, 0.5, 0]);
set(xl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [.5, -.05, 0]);
end
%Formas naturais calculadas experimentalmente
if resp==3 || resp==4 || resp==5
if fne==1
q=size(fneg,2);
for r=1:q
figure(p)
p=p+1;
plot(xv,u(:,fneg(1,r)),'-*')
hold on
plot(xv,zeros(size(xv)),'.-','color','k')
grid on
title(['Forma natural calculada experimentalmente do modo natural de vibração ' num2str(fneg(1,r))])
xl=xlabel('$x \quad / \quad m$','interpreter','latex','fontsize',16);
yl=ylabel(['$\{u\}_{ ' num2str(fneg(1,r)) ' }$'],'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(xl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [.5, -.05, 0]);
end
end
elseif resp==1
xv=[0 1];
if fne==1
q=size(fneg,2);
for r=1:q
figure(p)
p=p+1;
```

```
plot(xv,u(:,fneg(1,r)),'-*','markersize',10)
hold on
plot(xv,zeros(size(xv)),'.-','color','k')
grid on
title(['Forma natural calculada experimentalmente do modo natural de vibração ' num2str(fntg(1,r))])
yl=ylabel(['$$$\{u\}_{' num2str(fneg(1,r)) '}$$', 'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',16)
xticks([0 1])
xticklabels({'$$$x_1$$$','$$$x_2$$$'})
end
end
elseif resp==2
xv=[0 1 2 3 4];
if fne==1
q=size(fneg,2);
for r=1:q
figure(p)
p=p+1;
plot(xv,u(:,fneg(1,r)),'-*','markersize',10)
hold on
plot(xv,zeros(size(xv)),'.-','color','k')
grid on
title(['Forma natural calculada experimentalmente do modo natural de vibração ' num2str(fntg(1,r))])
yl=ylabel(['$$$\{u\}_{' num2str(fneg(1,r)) '}$$', 'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',16)
xticks([0 1 2 3 4 5])
xticklabels({'$$$x_1$$$','$$$x_2$$$','$$$x_3$$$','$$$x_4$$$','$$$x_5$$$'})
end
end
end
%Formas naturais calculadas teoricamente
if resp==3 || resp==4 || resp==5
if fnt==1
q=size(fntg,2);
for r=1:q
figure(p)
p=p+1;
plot(xv,ut(:,fntg(1,r)),'-*')
hold on
plot(xv,zeros(size(xv)),'.-','color','k')
grid on
title(['Forma natural calculada teoricamente do modo natural de vibração ' num2str(fntg(1,r))])
xl=xlabel('$$$x \quad / \quad m$$$','interpreter','latex','fontsize',16);
yl=ylabel(['$$$\{u\}_{' num2str(fntg(1,r)) '}$$', 'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
```

---

```

set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(xl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [.5, -.05, 0]);
end
end
elseif resp==1
xv=[0 1];
if fnt==1
q=size(fntg,2);
for r=1:q
figure(p)
p=p+1;
plot(xv,u(:,fntg(1,r)),'-*','markersize',10)
hold on
plot(xv,zeros(size(xv)),'.-','color','k')
grid on
title(['Forma natural calculada teoricamente do modo natural de vibração ' num2str(fntg(1,r))'])
yl=ylabel(['$$$u_{' num2str(fntg(1,r)) '}$$$'],'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',16)
xticks([0 1])
xticklabels({'$x_1$', '$x_2$'})
end
end
elseif resp==2
xv=[0 1 2 3 4];
if fnt==1
q=size(fntg,2);
for r=1:q
figure(p)
p=p+1;
plot(xv,u(:,fntg(1,r)),'-*','markersize',10)
hold on
plot(xv,zeros(size(xv)),'.-','color','k')
grid on
title(['Forma natural calculada teoricamente do modo natural de vibração ' num2str(fntg(1,r))'])
yl=ylabel(['$$$u_{' num2str(fntg(1,r)) '}$$$'],'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(gca,'TickLabelInterpreter','latex','FontSize',16)
xticks([0 1 2 3 4 5])
xticklabels({'$x_1$', '$x_2$', '$x_3$', '$x_4$', '$x_5$'})
end
end
end
%Resposta do sistema
if rs==1
q=size(rsg,2);
for r=1:q

```

```
figure(p)
p=p+1;
plot(t(1,1:N+1),x(rsg(1,r),:))
xlim([0 50*(1/wi(1,1))])
grid on
%title(['Resposta do GDL ' num2str(rsg(1,r)) ' em função do tempo '], 'fontsize',16)
xl=xlabel('$t \quad / \quad s$', 'interpreter','latex','fontsize',16);
yl=ylabel(['$x_{' num2str(rsg(1,r)) '}$', 'interpreter','latex','fontsize',16);
set(gcf,'color','w');
set(yl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [-0.05, 0.5, 0]);
set(xl, 'Units', 'Normalized', 'Position', [.5, -.05, 0]);
end
end

%Erro relativo
%frequencias naturais
errf=zeros(size(wi));
for p=1:size(wi,2)
errf(1,p)=abs(abs(wt(p,1)-wi(1,p))/wt(p,1))*100;
end
%media do erros
errft=sum(errf)/size(wi,2);
%vectores modais
errv=zeros(size(u));
for p=1:GDL
for q=1:size(wi,2)
if u(p,q)~=0
errv(p,q)=abs(abs(ut(p,q)-u(p,q))/u(p,q))*100;
end
end
end
%media dos erros
errvs=zeros(1,size(wi,2));
for p=1:size(wi,2)
errvs(1,p)=sum(errv(2:GDL,p));
end
errvs=errvs/(GDL-1);
errvt=sum(errvs)/size(wi,2);

%Variavel de Resultados
te.wt=wt;
te.ut=ut;
ex.wi=wi';
ex.u=u;
erro.freq=errf;
erro.somafreq=errft;
erro.vect=errv;
erro.somavect=errvs;
erro.totalsomavect=errvt;
```

---

```
resultados.teoricos=te;  
resultados.experimentais=ex;  
resultados.erro=erro;
```

```
clearvars -except resultados
```

```
toc
```



### Código da Função *ex2GDL*

---

#### Conteúdo

- 2GDL
- Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
- Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)
- Resposta

#### 2GDL

```
function [x, ws, us] = ex2GDL(GDL,t,amortecimento)
%verificacao do numero de GDL
if GDL ~=2
error('Número de Graus de Liberdade incorreto!')
else
```

#### Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)

```
f=[0 10]'; %excitação por GDL
m=[2,0; 0, 1]; %matriz de massa
k=[6, -2; -2, 4]; %matriz de rigidez
ksi=[.05; .05]; %razao de amortecimento
```

#### Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)

```
%determinacao de vectores e valores proprios
```

```
[ve,ls]=eig(k,m); %ve - vectores propios normalizados para massas unitarias
ls=diag(ls); %valores propios - quadrado das freq naturais
ws=sqrt(ls); %Frequencias naturais
us=zeros(size(ve)); %vectores propios adimensionais para comparacao de resultados
p=1;q=1; %contadores
while p<GDL+1
    if abs(ve(q,p))>.001
        us(:,p)=ve(:,p)/ve(q,p);
        p=p+1; q=1;
    else
        q=q+1;
    end
end
%eliminar valores residuais
for p=1:GDL
    for q=1:size(ws,1)
        if abs(us(p,q))<.01
            us(p,q)=0;
        end
    end
end

%excitacao em coord modais
N=ve'*f;
```

## Resposta

```
if amortecimento==0
    %sem amortecimento
    %resposta em coordenadas modais
    ni=zeros(GDL,size(t,2));
    for p=1:GDL
        ni(p,:)=N(p,1)/ls(p,1)*(1-cos(ws(p,1)*t));
    end
    %resposta em coordenadas generalizadas
    x=zeros(size(ni));
    for p=1:GDL
        x(p,:)=ve(p,:)*ni;
    end
elseif amortecimento ==1
    %com amortecimento
    wds=ws.*sqrt(1-ksi.^2);
    ws=wds;
    %resposta em coordenadas modais
    ni=zeros(GDL,size(t,2));
    for p=1:GDL
        ni(p,:)=N(p,1)/wds(p,1)*((wds(p,1)-exp(-ksi(p,1)*ws(p,1)*t)).*(ksi(p,1)*ws(p,1)*sin(wds(p,1)*t)));
    end
```



---

```
%resposta em coordenadas generalizadas
x=zeros(size(ni));
for p=1:GDL
x(p,:)=ve(p,)*ni;
end
else
error('Erro na escolha de amortecimento em ex2GDL!!!')
end

end
end
```



## Apêndice C

---

### Código da Função *ex5GDL*

---

#### Conteúdo

- 5GDL
- Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
- Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)
- Resposta

#### 5GDL

```
function [x, ws, us] = ex5GDL(GDL,t,amortecimento)
%verificacao do numero de GDL
if GDL ~=5
error('Número de Graus de Liberdade incorreto!')
else
```

#### Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)

```
f=[10 10 0 0 0]'; %excitacao por GDL
m=eye(5); %matriz de massa
k=[3,0,-2,0,0;0,4,-3,0,0;-2,-3,10,-3,-2;0,0,-3,4,0;0,0,-2,0,3]; %matriz de rigidez
amort=2; %(1 ou 2)1 - amortecimento em função de c / 2 - amortecimento definindo ksi
c=[3,0,-2,0,0;0,4,-3,0,0;-2,-3,10,-3,-2;0,0,-3,4,0;0,0,-2,0,3]; %matriz de amortecimento
ksi=[.06; .01; .01; .01; .01]; %razões de amortecimento
```

#### Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)

```
%determinacao de vectores e valores proprios
[ve,ls]=eig(k,m); %ve - vectores proprios normalizados para massas unitarias
```

```
ls=diag(ls); %valores propios - quadrado das freq naturais
ws=sqrt(ls); %Frequencias naturais
us=zeros(size(ve)); %vectores propios adimensionais para comparacao de resultados
p=1;q=1; %contadores
while p<GDL+1
    if abs(ve(q,p))>.001
        us(:,p)=ve(:,p)/ve(q,p);
        p=p+1; q=1;
    else
        q=q+1;
    end
end
%eliminar valores residuais
for p=1:GDL
    for q=1:size(ws,1)
        if abs(us(p,q))<.01
            us(p,q)=0;
        end
    end
end

%excitacao em coord modais
N=ve'*f;
```

## Resposta

```
%sem amortecimento
if amortecimento==0
    %resposta em coordenadas modais
    ni=zeros(GDL,size(t,2));
    for p=1:GDL
        ni(p,:)=N(p,1)/ls(p,1)*(1-cos(ws(p,1)*t));
    end
    %resposta em coordenadas generalizadas
    x=zeros(size(ni));
    for p=1:GDL
        x(p,:)=ve(p,:)*ni;
    end
    %com amortecimento
elseif amortecimento ==1
    %definir tipo de amortecimento
    if amort==1
        ksi=diag((ve'*c*ve))./(2*ws);
        wds=ws.*sqrt(1-ksi.^2);
        ws=wds;
    elseif amort==2
        wds=ws.*sqrt(1-ksi.^2);
        ws=wds;
```

---

```

else
error('Erro na definição do tipo de amortecimento - variável amort')
end
%resposta em coordenadas modais
ni=zeros(GDL,size(t,2));
for p=1:GDL
ni(p,:)=N(p,1)/wds(p,1)*((wds(p,1)-exp(-ksi(p,1)*ws(p,1)*t).*(ksi(p,1)*ws(p,1)*sin(wds(p,1)*t)+w
end
%resposta em coordenadas generalizadas
x=zeros(size(ni));
for p=1:GDL
x(p,:)=ve(p,:)*ni;
end
else
error('Erro na escolha de amortecimento em ex5GDL!!!')
end

end
end

```



### Código da Função *vigaFL*

---

#### Conteúdo

- Viga fixa-livre
- Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
- Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)
- Resposta

#### Viga fixa-livre

```
function [xr, ws, us, x] = vigaFL(GDL,t,fmax)
```

#### Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)

```
%massa volumica em kilograma por metro cubico  
ro=2700; %[kg/m^3]  
%modulo de elasticidade longitudinal em Pascal  
E=69e9; %[Pa]  
%largura/espessura em metros  
b=2e-3; %[m]  
%altura em metros  
h=40e-3; %[m]  
%comprimento em metros  
l=500e-3; %[m]  
%excitação por GDL  
f=zeros(GDL,1); %[N]  
f(GDL,1)=10;
```

**Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)**

```
%momento de segunda ordem
I=h*b^3/12; %[m^4]
%Area
A=h*b; %[m^2]
%viga discretizada
dx=1/(GDL-1);
x=0:dx:1;

% Frequencias naturais
n=1:10;
Bl=(2*n-1)*pi/2; %raizes
wst=zeros(10,1);
%frequencia máxima em rad/s
wmax=fmax*2*pi;
%calculo das frequencias
p=1; %contador
while max(wst)<wmax %frequencias naturais ate a freq max de ineteresse
wst(p,1)=Bl(1,p)^2*sqrt(E*I/(ro*A*l^4));
p=p+1;
end
n=p-2; %numero de modos naturais na banda de freq de interesse
ws=wst(1:n);%numero de freq naturais na banda de freq de interesse
Bl=Bl(1:n);
% Vectores Modais
B=Bl/l; %variavel beta
alpha=((sinh(Bl)-sin(Bl))./(cosh(Bl)+cos(Bl))); %variavel alpha
vm=zeros(GDL,n); %inicializacao dos vectores modais
Cn=1; %constante Cn
%vecores modais para massas unitarias
for p=1:GDL
for q=1:n
vm(p,q)=Cn*(cosh(B(q)*x(p))-cos(B(q)*x(p))-alpha(q)*(sinh(B(q)*x(p))-sin(B(q)*x(p))));
end
end
%vectores propios adimensionais para comparacao de resultados
us=zeros(size(vm)); %inicializacao
p=1;q=1; %contadores
while p<n+1
if abs(vm(q,p))>.001 %valor minimo para o calculo dos vectores propios
us(:,p)=vm(:,p)/vm(q,p);
p=p+1; q=1;
else
q=q+1;
end
end
%eliminar valores residuais
for p=1:GDL
```



---

```
for q=1:size(ws,1)
if abs(us(p,q))<.01
us(p,q)=0;
end
end
end
```

## Resposta

```
%excitacao em coordenadas modais
N=vm'*f;
%resposta em coordenadas modais
ni=zeros(n,size(t,2));
for p=1:n
ni(p,:)=N(p,1)/ws(p,1)^2*(1-cos(ws(p,1)*t));
end
%resposta em coordenadas generalizadas
xr=zeros(size(ni));
for p=1:GDL
xr(p,:)=vm(p,1:n)*ni;
end

end
```



### Código da Função *vigaAS*

---

#### Conteúdo

- Viga fixa-livre
- Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
- Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)
- Resposta

#### Viga fixa-livre

```
function [xr, ws, us, x] = vigaFL(GDL,t,fmax)
```

#### Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)

```
%massa volumica em kilograma por metro cubico  
ro=2700; %[kg/m^3]  
%modulo de elasticidade longitudinal em Pascal  
E=69e9; %[Pa]  
%largura/espessura em metros  
b=2e-3; %[m]  
%altura em metros  
h=40e-3; %[m]  
%comprimento em metros  
l=500e-3; %[m]  
%excitação por GDL  
f=zeros(GDL,1); %[N]  
f(GDL,1)=10;
```

**Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)**

```
%momento de segunda ordem
I=h*b^3/12; %[m^4]
%Area
A=h*b; %[m^2]
%viga discretizada
dx=1/(GDL-1);
x=0:dx:1;

% Frequencias naturais
n=1:10;
Bl=(2*n-1)*pi/2; %raizes
wst=zeros(10,1);
%frequencia máxima em rad/s
wmax=fmax*2*pi;
%calculo das frequencias
p=1; %contador
while max(wst)<wmax %frequencias naturais ate a freq max de ineteresse
wst(p,1)=Bl(1,p)^2*sqrt(E*I/(ro*A*l^4));
p=p+1;
end
n=p-2; %numero de modos naturais na banda de freq de interesse
ws=wst(1:n);%numero de freq naturais na banda de freq de interesse
Bl=Bl(1:n);
% Vectores Modais
B=Bl/l; %variavel beta
alpha=((sinh(Bl)-sin(Bl))./(cosh(Bl)+cos(Bl))); %variavel alpha
vm=zeros(GDL,n); %inicializacao dos vectores modais
Cn=1; %constante Cn
%vecores modais para massas unitarias
for p=1:GDL
for q=1:n
vm(p,q)=Cn*(cosh(B(q)*x(p))-cos(B(q)*x(p))-alpha(q)*(sinh(B(q)*x(p))-sin(B(q)*x(p))));
end
end
%vectores propios adimensionais para comparacao de resultados
us=zeros(size(vm)); %inicializacao
p=1;q=1; %contadores
while p<n+1
if abs(vm(q,p))>.001 %valor minimo para o calculo dos vectores propios
us(:,p)=vm(:,p)/vm(q,p);
p=p+1; q=1;
else
q=q+1;
end
end
%eliminar valores residuais
for p=1:GDL
```

---

```
for q=1:size(ws,1)
if abs(us(p,q))<.01
us(p,q)=0;
end
end
end
```

## Resposta

```
%excitacao em coordenadas modais
N=vm'*f;
%resposta em coordenadas modais
ni=zeros(n,size(t,2));
for p=1:n
ni(p,:)=N(p,1)/ws(p,1)^2*(1-cos(ws(p,1)*t));
end
%resposta em coordenadas generalizadas
xr=zeros(size(ni));
for p=1:GDL
xr(p,:)=vm(p,1:n)*ni;
end

end
```



### Código da Função *veioLL*

---

#### Conteúdo

- Veio livre - torção
- Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)
- Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)
- Resposta

#### Veio livre - torção

```
function [xr, ws, us, x] = veioLL(GDL,t,fmax)
```

#### Propriedades do sistema (susceptíveis a alteração)

```
%massa volumica em kilograma por metro cubico  
ro=7860; %[kg/m^3]  
%modulo de elasticidade transversal em Pascal  
G=80e9; %[Pa]  
%comprimento em metros  
l=3; %[m]  
%excitação por GDL  
f=zeros(GDL,1); %[Nm]  
f(GDL,1)=10;  
f(6,1)=-10;  
f(8,1)=-10;
```

#### Propriedades do sistema (calculadas automaticamente)

```
%veio discretizada
```

```
dx=1/(GDL-1);
x=0:dx:1;

% Frequencias naturais
n=1:10;
wst=zeros(10,1);
%frequencia máxima em rad/s
wmax=fmax*2*pi;
%calculo das frequencias
p=1; %contador
while max(wst)<wmax %frequencias naturais ate a freq max de ineteresse
wst(p,1)=n(p)*pi*sqrt(G/ro)/l;
p=p+1;
end
n=p-2; %numero de modos naturais na banda de freq de interesse
ws=wst(1:n);%numero de freq naturais na banda de freq de interesse

% Vectores Modais
vm=zeros(GDL,n); %inicializacao dos vectores modais
Cn=1; %constante Cn
%veccores modais para massas unitarias
for p=1:GDL
for q=1:n
vm(p,q)=Cn*(cos(q*pi*x(p)/l));
end
end
%vectores propios adimensionais para comparacao de resultados
us=zeros(size(vm)); %inicializacao
p=1;q=1; %contadores
while p<n+1
if abs(vm(q,p))>.001 %valor minimo para o calculo dos vectores propios
us(:,p)=vm(:,p)/vm(q,p);
p=p+1; q=1;
else
q=q+1;
end
end
%eliminar valores residuais
for p=1:GDL
for q=1:size(ws,1)
if abs(us(p,q))<.01
us(p,q)=0;
end
end
end
```



---

## Resposta

```
%excitacao em coordenadas modais
N=vm'*f;
%resposta em coordenadas modais
ni=zeros(n,size(t,2));
for p=1:n
    ni(p,:)=N(p,1)/ws(p,1)^2*(1-cos(ws(p,1)*t));
end
%resposta em coordenadas generalizadas
xr=zeros(size(ni));
for p=1:GDL
    xr(p,:)=vm(p,1:n)*ni;
end

end
```